

Глава 7

Динамика сложных жидкостей

В этой главе демонстрируется, как локальные уравнения течения и деформации материальной среды следуют из законов сохранения и принципов неравновесной термодинамики. Начало рассмотрения было положено, по-видимому, Эйлером и Бернулли в восемнадцатом столетии, локальные принципы термодинамики для сплошной среды в форме уравнений баланса были записаны в начале прошлого века Яуманном (Jaumann, 1911) и Лором (Lohr, 1917). В современной форме теория изложена, например, в книгах Де Гроота и Мазура (de Groot and Mazur, 1962) и Ландау и Лившица (1986). Далее мы следуем статье автора (Покровский, 1970), в которой внутренние процессы релаксации были включены в стандартную формулировку проблемы. Принципы теории вязкоупругости обсуждаются, но не делается попытка рассмотреть все доступные определяющие уравнения.

7.1 Уравнение непрерывности и закон сохранения импульса

Непрерывная среда характеризуется средней плотностью, которая является функцией координат и времени

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t).$$

Движение непрерывной среды описывается вектором скорости $\mathbf{v}$,

который является некоторой средней макроскопической скоростью и имеет три компоненты – функции координат и времени –

$$v_i = v_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Закон сохранения массы может быть написан в форме уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (7.1)$$

где $\rho \mathbf{v}$ – поток плотности массы. Здесь и далее плотность некоторой величины означает количество этой величины в единице объема среды.

Закон сохранения импульса может быть записан как

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \sigma_i,$$

где $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ – тензорный поток плотности импульса, который состоит из конвективного потока и тензора напряжения σ_{ik} ; величина σ_i является плотностью внешних сил, которые действуют на жидкость.

Мы можем использовать записанные выше соотношения, чтобы переписать закон сохранения плотности импульса в форме

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_i. \quad (7.2)$$

При временах наблюдения, намного больших, чем времена релаксации жидкости, внутреннее и внешнее вращение уравновешено, и, таким образом из уравнения (7.2) следует

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = -N_{ik}. \quad (7.3)$$

Тензор напряжения является несимметрическим, если имеется внешний вращающий момент силы N_{ik} . При отсутствии внешних сил закон сохранения углового момента для среды приводит к условию симметричности тензора напряжений. Мы далее предположим, что внутреннее и внешнее вращение уравновешено, и тензор напряжения является симметрическим.

7.2 Закон сохранения энергии и баланс энтропии

Плотность полной энергии жидкости U может быть представлена как сумма кинетической энергии движения и термодинамической

полной энергии покоящегося объема

$$U = \frac{1}{2}\rho v^2 + U_0. \quad (7.4)$$

Заметим, что объём, фиксированный в деформируемой жидкости, не содержит определённого количества вещества, и потому в качестве термодинамической системы, к которой возможно применить результаты второй главы, принимается фиксированное количество жидкости, в качестве которого удобно рассматривать единицу массы. Обращаясь к соотношению (2.8), записываем для рассматриваемого случая изменение энергии единицы массы жидкости в зависимости от изменений аргументов

$$d\varepsilon = T ds - p dv + \frac{1}{\rho} \Xi_\alpha d\xi^\alpha, \quad (7.5)$$

где p – давление, v и s – объём и энтропия единицы массы. Как характеристики неравновесности, в формуле (7.5) присутствуют внутренние переменные ξ^α , где индекс α используется для номера переменной и ее тензорных индексов, и соответствующие им термодинамические силы

$$\Xi_\alpha = \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi^\alpha} \right)_{s,\rho} = -T \left(\frac{\partial(\rho s)}{\partial \xi^\alpha} \right)_{T,\rho} > 0.$$

Используя определение энергии единицы объёма как $U_0 = \rho\varepsilon$, на основе соотношения (7.5) записываем дифференциал этой величины

$$dU_0 = \rho T ds + w d\rho + \Xi_\alpha d\xi^\alpha, \quad (7.6)$$

где введено обозначение для теплосодержания единицы массы $w = \varepsilon + p/\rho$. Величины T , w и Ξ_α являются функциями переменных s, ρ, ξ^α . В равновесии, когда нет никаких внешних воздействий, все $\xi^\alpha = 0$, в то время как величины T и w принимают свои равновесные значения.

Мы предполагаем, что внутренние источники энергии в жидкости отсутствуют, так что изменение плотности полной энергии U связано только с потоками через поверхность объема. Закон сохранения энергии может быть написан в форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad (7.7)$$

где $\mathbf{q}$ – поток плотности энергии.

Закон сохранения энергии также известен как первый принцип термодинамики. При формулировке уравнения движения жидкости, следует использовать также второй принцип термодинамики, который

может быть записан как уравнение для изменения энтропии s единицы массы. Уравнение баланса для плотности энтропии имеет форму

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\rho s + \mathbf{H}) = \Sigma,$$

где $\mathbf{H}$ – неконвективный поток плотности энтропии, Σ – неотрицательное количество производства энтропии. Записанное уравнение может быть переписано в другой форме

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div} \mathbf{H} = \Sigma. \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) не предполагает локальное равновесие системы и справедливо в общем случае.¹

В силу существования термодинамического соотношения между энтропией и внутренней энергией, неконвективный поток плотности энтропии $\mathbf{H}$ в уравнении (7.8) может быть связан с потоком плотности энергии $\mathbf{q}$ в уравнении (7.7); производство энтропии Σ также может быть определено через потоки.

Теперь, принимая соотношения (7.4) и (7.6) во внимание, мы можем написать скорость изменения плотности полной энергии движущейся жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Xi_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t}.$$

Мы можем использовать уравнения (7.1), (7.2) и (7.8), чтобы преобразовать записанное выше выражение к уравнению, которое имеет

¹Для систем, которые находятся локально в состоянии равновесия, имеется только конвективный перенос энтропии. Дело обстоит таким образом для идеальной жидкости, для которой

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} = 0.$$

Увеличение энтропии может быть связано с производством тепла в единице объема жидкости или, другими словами, с диссипацией энергии Φ .

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) = \frac{\Phi}{T}.$$

Неравенство может быть записано для случая, когда мы не можем рассматривать систему, как находящуюся локально в равновесии.

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) > \frac{\Phi}{T}.$$

В общем случае следует обращаться к уравнению (7.8).

форму закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(w + \frac{v^2}{2} \right) - v_i (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) + T H_k \right] \\ = T \Sigma - (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) \nu_{ik} + H_i \nabla_i T + \frac{d\xi^\alpha}{dt} \Xi_\alpha, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $\nu_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ является тензором градиентов скорости.

Сравнение уравнений (7.7) и (7.9) определяет выражения

$$q_k = \rho v_k \left(w + \frac{v^2}{2} \right) - v_i (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) + T H_k, \quad (7.10)$$

$$\Sigma = \frac{1}{T} \left((\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) \nu_{ik} - H_i \nabla_i T - \frac{d\xi^\alpha}{dt} \Xi_\alpha \right). \quad (7.11)$$

Выражение (7.10) определяет термодинамические потоки $\sigma_{ik} + p \delta_{ik}$ и H_k . Первые два слагаемые в правой части выражения (7.11) определяют производство энтропии как произведение (возможно с некоторыми множителями) указанных термодинамических потоков и термодинамических сил ν_{ik} и $\nabla_i T$, что соответствует общему выражению (4.10). Это означает, что процессы с градиентами скорости и температуры, как внутренними переменными, рассматриваются здесь как стационарные, когда времена релаксации внутренних переменных пренебрежимо малы по сравнению с характерными временами движения жидкости. Последние слагаемые в правой стороне соотношения (7.11) определяют непосредственный вклад в производство энтропии при релаксации неопределенных внутренних переменных, как представлено общим выражением (2.18); время релаксации не предполагается малым в этом случае. Уравнение релаксации внутренних переменных должно быть включено непосредственно в схему рассмотрения.

Заметим, что внутренние переменные ξ^α введены в соотношении (7.6) формально. Однако, успех конкретных приложений зависит от надлежащего выбора внутренних переменных для исследуемого случая. Рассмотрение эвристических моделей обычно помогает распознать, какие величины описывают отклонение системы от равновесного состояния и могут использоваться в качестве внутренних переменных.

7.3 Термодинамические потоки и процессы релаксации

Чтобы продвинуться далее, мы должны вспомнить, что, согласно второму уравнению из (4.3), термодинамические потоки в стационарном состоянии можно рассматривать как функции термодинамических сил (не упоминая другие термодинамические переменные), а изменение внутренних переменных с заметным временем релаксации может быть определено уравнением (3.2), так что в рассматриваемом случае мы можем записать зависимости²

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} + p\delta_{ij} &= f_{ij}(\nu_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma) \\ -H_i &= H_i(\nu_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma), \\ -\frac{d\xi^\alpha}{dt} &= g^\alpha(\nu_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma).\end{aligned}\tag{7.12}$$

Мы должны обратить особое внимание на последнее отношение в (7.12), которое является уравнением релаксации для переменной ξ^α .

Зависимости (7.12) могут быть рассмотрены в виде квази-линейных функций аргументов, что не ограничивает общности рассмотрения. Но при этом следует рассматривать симметрическую и антисимметрическую части тензора напряжений, как отдельные потоки, что определяет соотношения

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki} + 2p\delta_{ik}) &= \eta_{ikjs}\gamma_{js} + K_{ikjs}\omega_{js} + L_{ikj}\nabla_j T + M_{ik\alpha}\xi_\alpha, \\ \frac{1}{2}(\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) &= \bar{K}_{ikjs}\gamma_{js} + N_{ikjs}\omega_{js} + \bar{C}_{ikj}\nabla_j T + \bar{D}_{ik\alpha}\xi_\alpha, \\ -H_i &= \bar{L}_{ijs}\gamma_{js} + C_{ijs}\omega_{js} + A_{ij}\nabla_j T + G_{i\alpha}\xi_\alpha, \\ -\frac{d\xi^\alpha}{dt} &= \bar{M}_{\alpha js}\gamma_{js} + D_{\alpha js}\omega_{js} + \bar{G}_{\alpha i}\nabla_i T + P_{\alpha\gamma}\xi_\gamma.\end{aligned}\tag{7.13}$$

²Отметим, что диффузией внутренних переменных, то есть диффузией структурных элементов при негомогенном распределении значений внутренних переменных здесь пренебрегаем. Иначе, величины вида $\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x_i \partial x_l}$ должны быть добавлены к набору аргументов в правой части функций в (7.12). Мы не будем обсуждать эту ситуацию впредь.

Тензор градиентов скорости также представлен в виде суммы симметрической и антисимметрической частей

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nu_{ij} + \nu_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nu_{ij} - \nu_{ji}).$$

Матричные коэффициенты в (7.13) зависят от термодинамических переменных, которыми, в обсуждаемом случае, являются давление p или плотность ρ (мы можем, выбрать любую из них, так как существует уравнение состояния, связывающее эти переменные), температура T и внутренние переменные ξ^α . Все компоненты матриц в соотношениях (7.13) зависят от внутренних переменных, тем не менее, рассматривая линейное приближение теории пригодное для приложений, можно считать их независимыми от внутренних переменных.

Основанием для соотношений между некоторыми коэффициентами служит принцип Онзагера (см. раздел 4.5), который справедлив для стационарных состояний в линейном приближении. Чтобы воспользоваться принципом, разложим коэффициенты в уравнении (7.13) в ряд около равновесных значений внутренних переменных. Члены нулевого порядка разложения компонентов матриц в ряд связаны соотношениями

$$\overline{K}^0_{jsik} = K^0_{ikjs}, \quad \overline{C}^0_{ikj} = -C^0_{jik}, \quad \overline{L}^0_{jik} = -L^0_{ikj}. \quad (7.14)$$

Черточки над символами означают матрицы, которые получены из первоначальных матриц (без черточек) простым преобразованием. Отметим еще раз, что эти соотношения справедливы при $\xi^\alpha = 0$. Далее, интересуясь нелинейными отношениями, учитываем, что все матрицы зависят от внутренних переменных.

В простом случае, когда все внутренние переменные являются скалярными величинами, состояние системы является изотропным и все матричные коэффициенты в (7.13) выражаются через единичную матрицу; отношения (7.13) принимают более простую форму, которая может быть легко написана для каждого данного набора внутренних переменных.

В реологических терминах, уравнения (7.12) или (7.13) составляют систему определяющих соотношений системы. Вместе с уравнениями (7.3), (7.4) и (7.7), они образуют систему уравнений движения среды. Присутствие внутренних переменных и уравнений для их изменения является специфическими особенностями жидкостей, которые мы называем сложными жидкостями, рассматриваемыми в этой главе. Фактические свойства жидкости определены выбором внутренних

переменных ξ^α . Соотношения (7.13) могут быть легко записаны для каждого заданного набора внутренних переменных. Набор внутренних переменных был идентифицирован, например, для растворов и расплавов полимерных жидкостей, что описано в монографии автора (Pokrovskii, 2010).

7.4 Принцип относительности для медленных движений

Записанные выше соотношения (7.13) могут быть приведены к более определённой форме при наложении некоторых ограничений, которые следуют из предположения, что движение структурных элементов среды не меняется очень быстро, так что оказывается справедливым следующее соотношение

$$\frac{u\rho a}{\eta} \ll 1. \quad (7.15)$$

Здесь, a – характерный размер структурного элемента; ρ – плотность, равная приблизительно 1 g/cm^3 ; η – эффективный коэффициент вязкости среды, который можно оценить как $10^{-2} - 10 \text{ Ps}$. Характеристическая скорость движения частицы u не превышает, очевидно, среднюю тепловую скорость $(T/m)^{1/2}$. Легко видеть что при комнатной температуре и при выписанных выше значениях величин, условие (7.15) выполняется, если $a \gg 10^{-7} - 10^{-6} \text{ cm}$.

Хорошо известно, что уравнения механики являются ковариантными по отношению к преобразованию Галилея. Это может быть также сказано об отношениях (7.12) и (7.13). В случае, когда движения внутренних частиц медленны (в смысле, обсужденном выше), мы можем утверждать, что справедлив более сильный принцип, который гласит, что все процессы происходят одинаковым образом и, следовательно, должны описываться подобными уравнениями во всех системах координат, которые связаны друг с другом преобразованием

$$x_i = a_{ik}x'_k + c_i, \quad (7.16)$$

где ортогональный тензор a_{ik} и вектор c_i являются произвольными функциями времени.

В отличие от принципа Галилео, сформулированный принцип, который называется также принципом материальной объективности, справедлив для случаев, когда силами инерции можно пренебречь.

Рассмотрим ограничения налагаемые на форму уравнений переноса сформулированным принципом. Легко видеть, что, когда преобразование (7.16) применяется к координатам, тензор градиентов скорости преобразуется как

$$\nu_{ik} = a_{il}a_{kj}\nu'_{lj} + \dot{a}_{il}a_{kl}.$$

Точка над символом обозначает дифференцирование относительно времени.

Симметрический тензор градиента скорости преобразуется как тензор, независимый от времени

$$\gamma_{ik} = a_{il}a_{kj}\gamma'_{lj}, \quad (7.17)$$

в то время как антисимметрический тензор преобразуется следующим образом

$$\omega_{ik} = a_{il}a_{kj}\omega'_{lj} + \dot{a}_{il}a_{kl}. \quad (7.18)$$

Обращаясь к внутренним переменным, рассмотрим одну из величин, которая, полагаем, является тензором произвольного ранга и преобразуется подобно координатам, то есть, контривариантно

$$\xi_{ik\dots l} = a_{ij}a_{ks}\dots a_{ln}\xi'_{js\dots n}.$$

Дифференцируя тензор относительно времени, находим, что

$$\frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} = \dot{a}_{ij}a_{pj}\xi_{pk\dots l} + \dot{a}_{kj}a_{pj}\xi_{ip\dots l} + \dots + \dot{a}_{lj}a_{pj}\xi_{ik\dots p} + a_{ij}a_{ks}\dots a_{ln}\frac{d\xi'_{js\dots n}}{dt}.$$

Выражения типа $\dot{a}_{il}a_{kl}$ определяются по соотношению (7.18), что позволяет переписать последнее выражение в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} - \omega_{ip}\xi_{pk\dots l} - \omega_{km}\xi_{im\dots l} - \dots - \omega_{ln}\xi_{ik\dots n} \\ = a_{ij}a_{ks}\dots a_{ln} \left(\frac{d\xi'_{is\dots n}}{dt} - \omega'_{jq}\xi'_{qs\dots n} - \omega'_{sq}\xi'_{jq\dots n} - \dots - \omega'_{nq}\xi'_{js\dots q} \right). \end{aligned}$$

Можно видеть, что при произвольном линейном преобразовании координат комбинация

$$\frac{D\xi_{ik\dots l}}{Dt} = \frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} - \omega_{ip}\xi_{pk\dots l} - \omega_{km}\xi_{im\dots l} - \dots - \omega_{ln}\xi_{ik\dots n} \quad (7.19)$$

преобразуется как независимый от времени тензор (Jaumann, 1911). Выражение (7.19) называется производной Яуманна тензора $\xi_{ik\dots l}$ относительно времени.

Имеется большое количество ковариантных производных тензора $\xi_{ik\dots l}$, среди которых производная Яуманна имеет самую простую форму. Действительно, из выражений (7.18) и (7.19) следует соотношение

$$\dot{a}_{il}a_{kl} = \omega_{ik} + \kappa\gamma_{ik} - a_{is}a_{kj}(\omega'_{sj} + \kappa\gamma'_{sj})$$

где κ - произвольная постоянная. Мы можем использовать это соотношение, чтобы ввести производные, которые являются обобщениями производной Яуманна.

Ковариантные тензоры можно рассмотреть подобным способом.

7.5 Вязкоупругие жидкости

Можно теперь возвратиться к системе определяющих уравнений, обсуждаемых в разделе 6.3. Уравнения (7.13) согласно требованию быть ковариантными при преобразовании (7.16) могут быть написаны в более простой форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki} + 2p\delta_{ik}) &= \eta_{ikjs}\gamma_{js} + L_{ikj}\nabla_j T + M_{ik\alpha}\xi_\alpha, \\ \frac{1}{2}(\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) &= \bar{D}_{ik\alpha}\xi_\alpha, \\ -H_i &= \bar{L}_{ijs}\gamma_{js} + A_{ij}\nabla_j T + G_{i\alpha}\xi_\alpha, \\ -\frac{D\xi^\alpha}{Dt} &= \bar{M}_{\alpha js}\gamma_{js} + \bar{G}_{\alpha i}\nabla_i T + P_{\alpha\gamma}\xi_\gamma, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где производная Яуманна определена как

$$\frac{D\xi^\alpha}{Dt} = \frac{d\xi^\alpha}{dt} + D_{\alpha js}\omega_{js}. \quad (7.21)$$

Система соотношений (7.20) определяет потоки как квази-линейные функции термодинамических сил. Все матрицы в соотношениях (7.20) зависят от внутренних переменных, матрица $D_{\alpha js}$ может быть определена для каждого заданного тензора ξ^α при сравнении уравнения (7.21) с определением (7.19).

В общем случае система (7.20) представляет систему определяющих уравнений вязкоупругой жидкости; четвертое соотношение в системе (7.20) является уравнением релаксации для переменной ξ^α и ответственно за эффекты вязкоупругости. Если время наблюдения t много больше времен релаксации τ всех внутренних процессов, изменением внутренних переменных можно пренебречь, $\xi^\alpha = 0$, и уравнения (7.20) сводятся к определяющим уравнениям нелинейной вязкой жидкости. В противном случае следует учитывать явно релаксационные уравнения, однако набор внутренних переменных не определяется в структуре феноменологической теории, и уравнения (7.20) не могут быть определены далее без дополнительных предположений.³

В качестве примера, используем общие соотношения (7.20) и (7.21), для определения определяющих уравнений в простом случае изотермического движения жидкости без объемных сил и без вращающего момента объемных сил. Предполагаем, что среда характеризуется единственной внутренней переменной – симметрическим тензором второго ранга ξ_{js} . Удобно ввести обозначения функций

$$\bar{\sigma}_{ik}(\xi) = M_{ikjs}(\xi) \xi_{js}, \quad \phi_{ij}(\xi) = P_{ijls}(\xi) \xi_{ls}$$

и написать определяющие соотношения следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} + p\delta_{ik} &= \eta_{ikjs}(\xi) \gamma_{js} + \bar{\sigma}_{ik}(\xi), \\ -\frac{D\xi_{ij}}{Dt} &= V_{ijls}(\xi) \gamma_{ls} + \phi_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Матрица во втором уравнении может быть представлена в линейной форме

$$V_{ijls} = -\frac{1}{2}\kappa(\xi_{il}\delta_{js} + \xi_{js}\delta_{il} + \xi_{is}\delta_{jl} + \xi_{jl}\delta_{is}) \quad (7.23)$$

где κ является числовым параметром, которому обычно приписывают значения ± 1 или 0.

Функциональные зависимости в записанных уравнениях остаются неизвестными, так что для того, чтобы продвинуться далее, мы

³Наиболее известный пример вязкоупругих жидкостей представляют полимеры и их растворы. Было установлено (Pokrovskii, 2010), что необходимо задать два набора внутренних переменных, чтобы сформулировать определяющие уравнения для этого случая. Для описания вязкоупругости слабо перепутанных полимерных систем необходим набор конформационных переменных x_{ik}^α , которые характеризуют отклонения формы и размера макромолекулярных клубков от равновесных значений. Чтобы описывать поведение сильно перепутанных систем, нужно, кроме набора конформационных переменных, иметь набор переменных u_{ik}^α , которые связаны со средней ориентацией частей макромолекул.

должны привлечь эмпирические свидетельства и допустить некоторые упрощения. Для некоторых жидкостей, например, можно пренебречь первым слагаемым в правой части первого уравнения из системы (7.22), а вторые слагаемые в правых частях уравнений (7.22) могут быть представлены в общем виде как функции тензора внутренней переменной ξ_{il}

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ik} &= \sigma_0 \delta_{ik} + \sigma_1 \xi_{ik} + \sigma_2 \xi_{il} \xi_{lj}, \\ \phi_{ik} &= \phi_0 \delta_{ik} + \phi_1 \xi_{ik} + \phi_2 \xi_{il} \xi_{lk},\end{aligned}\quad (7.24)$$

где коэффициенты σ_i и ϕ_i ($i = 0, 1, 2$) являются функциями трех инвариантов тензора ξ_{il}

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 \xi_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\xi_{ij} \xi_{ji} - \xi_{ii} \xi_{jj}), \quad I_3 = |\xi_{ij}|. \quad (7.25)$$

Соотношения (7.22) - (7.25) представляют общую форму нелинейного определяющего уравнения вязкоупругой жидкости с единственным внутренним параметром. Эта форма охватывает множество эмпирических определяющих уравнений. Можно сослаться для примера на уравнения (43) и (44) в статье (Pyshnograï et al, 2009), которые оказались очень удачными для полимерных жидкостей.

7.6 Разнообразие форм определяющих соотношений

Определяющие соотношения для вязкоупругих жидкостей, описанные в предыдущих разделах, содержат релаксационные уравнения для внутренних переменных, которые следует рассматривать как независимые переменные в системе уравнений динамики жидкостей. Однако в прежние времена, начиная с работ лорда Кельвина (Thomson, 1865), Максвелла (Maxwell, 1867) и Больцмана (Boltzmann, 1874), определяющие соотношения для вязкоупругих жидкостей формулировались как соотношения между тензором напряжений и кинетическими характеристиками деформированного состояния среды без упоминания внутренних переменных. В этом разделе будет продемонстрировано, что из формализма с внутренними переменными следуют два типа определяющие соотношений, которые рассматривались ранее.

Для иллюстрации мы рассмотрим простую систему уравнений

$$\sigma_{ik} + p\delta_{ik} = 3\frac{\eta}{\tau} \left(\xi_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} \right), \quad (7.26)$$

$$\frac{d\xi_{ik}}{dt} - \nu_{ij}\xi_{jk} - \nu_{kj}\xi_{ji} = -\frac{1}{\tau} \left(\xi_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} \right), \quad (7.27)$$

где коэффициент вязкости η и время релаксации τ являются функциями инвариантов (7.25) тензора ξ_{ik} , как внутренней переменной. При исключении тензора ξ_{ij} из системы уравнений (7.26) и (7.27), мы можем получить соотношение между тензором напряжений и тензором градиентов скорости. Это может быть выполнено двумя различными способами.

Во-первых, можно полагать, что уравнение (7.26) является определением тензора ξ_{ij} , который может быть подставлен во второе уравнение (7.27). В результате мы получаем дифференциальное уравнение для дополнительных напряжений $\tau_{ik} = \sigma_{ik} + p\delta_{ik}$

$$\frac{d\tau_{ik}}{dt} - \nu_{ij}\tau_{jk} - \nu_{kj}\tau_{ji} = -\frac{1}{\tau}(\tau_{ik} - 2\eta\gamma_{ik}). \quad (7.28)$$

Величины τ и η в уравнении (7.28) зависят, вообще говоря, от инвариантов тензора напряжений τ_{ik} и тензора градиентов скорости. Следует заметить, что поведение нелинейной вязкоупругой жидкости в нестационарном состоянии оказывается различным, в зависимости от того, являются ли материальных параметров τ и η функциями тензора градиентов скорости или тензора напряжений.

В простом случае, когда время релаксации τ и коэффициент вязкости η рассматриваются постоянными, из соотношения (7.28) следует уравнение Максвелла (Maxwell, 1867)

$$\frac{d(\sigma_{ik} + p\delta_{ik})}{dt} + \frac{1}{\tau}(\sigma_{ik} + p\delta_{ik}) = 2\frac{\eta}{\tau}\gamma_{ik}. \quad (7.29)$$

Изложение рафинированного вывода уравнения можно найти в книге Ландау и Лифшица (1988, стр. 36).

При другом варианте преобразования, мы можем вообразить, что решение уравнения (7.27) может быть найдено. Ниже, решение записано для однородного потока с точностью до второго порядка относительно градиента скорости

$$\xi_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik} + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) \gamma_{ij}(t-s) ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) \\
& \times [\nu_{ij}(t-s)\gamma_{jk}(t-s-u) - \nu_{kj}(t-s)\gamma_{ji}(t-s-u)] du ds.
\end{aligned}$$

Далее, найденное решение должно быть вставлено в уравнение (7.26), после чего полученное соотношение определяет тензор напряжения как функцию тензора градиента скорости в предыдущие моменты времени. Линейное по градиентам скорости слагаемое имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\frac{\eta}{\tau} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) \gamma_{ik}(t-s) ds. \quad (7.30)$$

В общем случае, тензор напряжений представляется разложением в ряд повторных интегралов.

Обобщение соотношений (7.28) и (7.30) на случай многих релаксационных процессов не представляет затруднений. В самом простом случае однородного движения обобщение соотношения (7.30) имеет вид

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2 \int_0^\infty \eta(s) \gamma_{ik}(t-s) ds. \quad (7.31)$$

Функция памяти $\eta(s)$ может быть определена, если набор внутренних переменных задан.

Следует отметить, что первый, кто использовал функциональные отношения для описания поведения вязкоупругих материалов, был Больцман (Boltzmann, 1874). Понятие о том, что тензор напряжений в общем случае может быть представлен как функция градиентов скорости или градиентов смещения в предыдущие моменты времени, было положено в основу феноменологической теории так называемых простых материалов (Coleman и Нолл, 1961).

Можно видеть, что имеется различные формы представления определяющих соотношений для вязкоупругой жидкости. Конечно, различные формы определяющих соотношений являются эквивалентными. Мы можем использовать любую из них, чтобы описать поведение вязкоупругих жидкостей. Однако, описание жидкости в терминах внутренних переменных позволяет использовать дополнительную информацию о микроструктуре материала (если она доступна) и, фактически, оказывается самой универсальной формулировкой определяющих уравнений. Схема, которая включает внутренние переменные, отражает более глубокое проникновение в механизмы вязкоупругого поведения материалов и является фундаментальной. С этой точки зрения, все представления о деформированном материале могут быть

объединены и классифицированы. Однако, набор внутренних переменных специфичен для различных материалов и не может быть определен в рамках феноменологической теории. Принципы формулировки феноменологической теории для любых реальных материалов ясны, и в этом смысле, можно говорить об общей феноменологической теории вязкоупругости, которая включает всевозможные конкретные случаи.

Литература

- Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. (1986) *Гидродинамика, изд. 3*. Наука: Главная редакция физико-математической литературы Москва. Перевод: L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed. Pergamon, Oxford, 1987.
- Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. (1987) *Теория упругости, изд. 4*. Наука: Главная редакция физико-математической литературы, Москва. Перевод: L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., Pergamon, Oxford, 1987.
- Покровский В.Н. (1970) Уравнения движения вязкоупругих систем как следствие законов сохранения и феноменологической теории неравновесных процессов. *Механика полимеров* No 5, 799 - 811. Перевод: V.N. Pokrovskii, Equations of motion of viscoelastic systems as derived from the conservation laws and the phenomenological theory of non-equilibrium processes, *Polymer Mechanics* **6**, 693 - 702, 1970.
<http://ecodynamics.narod.ru/polymer/MP1970.pdf>
- Boltzmann L. (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Sitzungsber Akad Wiss Wien Mathem Naturwiss.* 70: 275-300.
- Coleman B.D. and Noll W. (1961) Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Modern Phys.* **33**, 239 - 249.
- Groot de S.R. and Mazur P. (1962) *Non-equilibrium thermodynamics*. NorthHolland, Amsterdam. Перевод: С.Р. Де Гроот и П. Мазур, *Неравновесная термодинамика*. Мир, Москва, 1964.
- Jaumann G. (1911) Geschlossenes System physicalischer und chemischer Differentialgesetze. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Kl. Wien*, Abt.2a, Bd.120, Heft 4, 385-530.
- Lohr E. (1917) Entropieprinzip und geschlossenes Gleichungssystem *Denkschriften der Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse* **93** 339 - 421

- Maxwell J.C. (1867) On the Dynamical Theory of Gases *Trans. Roy. Soc.* **157** 49-88
- Pokrovskii V.N. (2010) *The mesoscopic theory of polymer dynamics, 2nd Ed.* Springer, Dordrecht-Heidelberg-London-New York.
- Pyshnograï G.V., Gusev A.S. and Pokrovskii V.N. (2009) Constitutive equations for weakly entangled linear polymers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 164 17-28.
- Thomson W.W. (1865) On the Elasticity and Viscosity of Metals *Proc. Roy. Soc* **14** 289-297