Глава 4

Многоотраслевая модель производственной системы

Многоотраслевая модель производства предполагает определенное движение: природные вещества преобразовываются в законченные и незаконченные изделия, последние преобразовываются в другие изделия и так далее, пока все это, в конце концов, не потребляется, и вещества возвращаются в окружающую среду как мусор. Метод производства – *технология* определяет, прежде всего, что и как следует производить, определяет материальную сторону процесса производства. В этой главе сформулированы динамические уравнения для многоотраслевой модели, основанные на уравнениях баланса продуктов и содержащие личное и общественное потребление как ограничение для роста. Эти ограничения определяют *потенциальные инвестиции* и, следовательно, возможное развитие производственной системы. Ограничения, возникающие из-за доступности труда и замещающей работы будут введены и изучены в последующих главах и мы вернёмся к многоотраслевым динамическим уравнениям в главе 9.

4.1 Технологическая структура производства

Основываясь на многоотраслевой балансовой модели, описанной первоначально Леонтьевым (Leontief, 1936, 1941, 1988) и Срафа (Sraffa, 1975), рассмотрим функционирование производственной системы. В качестве отправной точки последующего изложения взяты балансовые соотношения (2.3) и (2.4) для стоимости созданных продуктов, то есть,

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_i^j + Y_i, \quad X^i = \sum_{j=1}^{n} X_j^i + Z^i. \tag{4.1}$$

Эти уравнения связывают валовой и конечный продукты сектора, $X_j = X^i$ и Y_j, производство стоимости в секторе Z^i, и промежуточное производственное потребление X_j^i. Как балансовые соотношения, уравнения (4.1) справедливы для любого случая, но не позволяют определить выпуски производственной системы экономики. Естественно предполагать, что промежуточное производственное потребление X_j^i зависит от валового отраслевого выпуска X_j. Далее, мы рассматриваем самый простой случай линейного приближения, которое было предложено и исследовано Леонтьевым (Leontief, 1936, 1941). Введение технологических матриц, характеризующих производственную систему, оказалось важным этапом в развитии экономической теории.

4.1.1 *Матрица затраты - выпуск*

Очевидно, что чем больше валовой продукт сектора X_i, тем большим должно быть промежуточное производственное потребление всех продуктов X_j^i. Это позволяет ввести характеристики системы в виде технологической матрицы, что может быть выполнено двумя различными способами. В оригинальной работе (Leontief, 1936, 1941) предполагается, что промежуточное производственное потребление X_j^i пропорционально валовому секторному выпуску

$$X_j^i = a_j^i X_i. \tag{4.2}$$

Другим образом технологическая матрица может быть введена как отношение скоростей соответствующих величин

$$\frac{dX_j^i}{dt} = \tilde{a}_j^i \frac{dX_i}{dt}. \tag{4.3}$$

Как уравнение (4.2), так и уравнение (4.3) определяют матрицу коэффициентов промежуточного производственного потребления, которые связаны друг с другом соотношением

$$\tilde{a}_j^i = a_j^i + \frac{1}{\delta^i} \frac{da_j^i}{dt}, \tag{4.4}$$

где $\delta^i = \dfrac{1}{X_i} \dfrac{dX_i}{dt}$ - темп роста валового продукта отрасли. И в том и другом случае матрицы не зависят от количества произведённого продукта, а являются характеристиками производственной системы непосредственно. Однако уравнение (4.3) определяет характеристики технологии, введенной в данный момент времени, в то время как уравнение (4.2) вводит матрицу промежуточных коэффициентов потребления, которые являются усредненными характеристиками всей существующей технологии. Конечно, в случае, когда технология не зависит от времени, компоненты матриц, введенных различными способами совпадают. Различие может быть незначительным, если технология меняется медленно.

Мы будем следовать Леонтьеву (Leontief, 1936, 1941), кто предпочёл ввести матрицу коэффициентов промежуточного потребления, или матрицу затраты-выпуск (the input-output matrix), как соотношение (4.2). В развернутой форме матрица имеет вид

$$\mathsf{A} = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

Матрица A является феноменологической характеристикой технологической организации, существующей в производственной системе в рассматриваемый момент времени. Приложение **A** содержит пример матрицы затраты-выпуск.

4.1.2 *Статическое уравнение Леонтьева*

Теперь, можно использовать формулы (4.2), чтобы переписать отношения баланса (4.1) в виде

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i X_i + Y_j, \tag{4.6}$$

$$X_i = a^i X_i + Z^i, \quad a^i = \sum_{l=1}^{n} a_l^i. \tag{4.7}$$

При заданной технологической матрице A, записанные уравнения соединяют три вектора: валовой продукт X_j, конечный продукт Y_j и отраслевое производство стоимости Z^i, так что только один из векторов следует считать независимым. Уравнение (4.6) известно как *статическое уравнение Леонтьева*. Все переменные X_j, Y_j и Z^i в уравнениях (4.6) и (4.7) относятся к одному и тому же моменту времени.

Уравнения (4.6) и (4.7) позволяют нам установить свойства матрицы A. Требование продуктивности определяет, что производство стоимости в отрасли должно быть неотрицательным

$$Z^i \geq 0.$$

Это условие с учётом уравнения (4.7) определяет неравенство

$$\sum_{l=1}^{n} a_l^i < 1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Естественно также предположить, что все компоненты матрицы A неотрицательны, так что для каждого компонента матрицы A имеем

$$0 \leq a_j^i < 1, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{4.8}$$

4.1.3 *Планирование валового продукта*

Чтобы произвести определенное количество конечного продукта Y_j, каждая отрасль нуждается в продуктах, вообще говоря, всех отраслей, так что, чтобы получить конечный продукт Y_j, следует планировать производство валовой продукции во всех отраслях. Уравнение (4.6) позволяет вычислить валовой продукт X_j, который необходим, чтобы получить конечный продукт Y_j при заданной технологии. Удобно переписать уравнение (4.6) в векторной форме

$$\mathsf{X} = \mathsf{A}\mathsf{X} + \mathsf{Y} \tag{4.9}$$

Нетрудно записать, используя обозначение E для единичной матрицы, формальное решение этого уравнения

$$\mathsf{X} = (\mathsf{E} - \mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{Y}, \tag{4.10}$$

которое может быть также представлено в виде

$$\mathsf{X} = \left(\mathsf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{A}^k\right)\,\mathsf{Y}, \tag{4.11}$$

В силу свойства (4.8) матрицы A

$$\mathsf{A}^k \to 0,$$

так что ряд в выражении (4.11) сходится. Неотрицательность компонент матрицы гарантирует неотрицательность валового продукта при неотрицательном конечном продукте. Можно непосредственно проверить, что выражение (4.11) удовлетворяет уравнению (4.9). Действительно,

$$\begin{aligned} \mathsf{Y} &= (\mathsf{E}-\mathsf{A})\left(\mathsf{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{A}^k\right)\mathsf{Y} \\ &= \left(\mathsf{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{A}^k-\mathsf{A}-\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{A}^{k+1}\right)\mathsf{Y} \\ &= \left(\mathsf{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{A}^k-\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}^{i}\right)\mathsf{Y} = \mathsf{Y} \end{aligned}$$

Заметим, что в представлении (4.11) матрицу A называют матрицей прямых затрат, матрицу A^2 называют матрицей косвенных затрат первого порядка, и так далее. Матрицу $(\mathsf{E}-\mathsf{A})^{-1}$ называют матрицей полных затрат.

4.1.4 *Матрица капитал – выпуск*

В линейном приближении полагаем, что фиксированный основной капитал (стоимость производственного оборудования) вида j в секторе i пропорционален валовому продукту сектора

$$K^i_j = b^i_j X_i. \tag{4.12}$$

Это соотношение определяет матрицу коэффициентов, каждый из которых определяет величину основного капитала необходимого для выпуска единицы валового продукта,

$$\mathsf{B} = \begin{Vmatrix} b^1_1 & b^2_1 & \dots & b^n_1 \\ b^1_2 & b^2_2 & \dots & b^n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^1_n & b^2_n & \dots & b^n_n \end{Vmatrix}. \tag{4.13}$$

Наряду с матрицей затраты–выпуск A, матрица B также является характеристикой используемой в производственной системе технологии.

Если технология изменяется в течение времени, то коэффициент пропорциональности b^i_j представляет смесь всех технологий, старых и новых.[1]

Легко получить соотношение между количеством производственного оборудования определенного вида K_j и отраслевого капитала K^i. Действительно, из определений величин в разделе 2.3.2 и соотношения (4.12), следует, что указанные величины связаны друг с другом посредством компонент матрицы капитал-выпуск

$$K_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{b}^i_j K^i. \tag{4.14}$$

Здесь введена матрица безразмерных коэффициентов

$$\overline{b}^i_j = (b^i)^{-1} b^i_j, \quad b^i = \sum_{l=1}^{n} b^i_l. \tag{4.15}$$

В силу определения, компоненты этой матрицы связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{b}^i_j = 1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Введение технологической матрицы B позволяет также найти соотношение между инвестициями продукта j во все отрасли I_j и полными инвестициями I^i в отрасли i. Чтобы получить это соотношение, обратимся к разделу 2.3.2, где находим уравнение динамики общего количества оборудования K_j во всех секторах и уравнение динамики капитала K^i в секторе i, то есть уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dK_j}{dt} &= I_j - \mu K_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \frac{dK^i}{dt} &= I^i - \mu K^i, \quad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Используем теперь соотношение (4.14) и перепишем уравнения (4.16) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{b}^i_j \frac{dK^i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} K^i \frac{d\overline{b}^i_j}{dt} = I_j - \mu \sum_{i=1}^{n} \overline{b}^i_j K^i, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

[1] Вместо матрицы B, можно использовать матрицу $\tilde{\mathsf{B}}$, характеризующую вводимую в текущее время технологию. Соотношение между компонентами матрицы B и $\tilde{\mathsf{B}}$ аналогично соотношению между компонентами матрицы A и $\tilde{\mathsf{A}}$ в уравнении (4.4).

$$\frac{dK^i}{dt} = I^i - \mu K^i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.17}$$

Затем, мы можем исключить производные секторного капитала из соотношений (4.17) для того, чтобы найти искомое соотношение

$$I_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_j^i I^i + \sum_{i=1}^{n} K^i \frac{d\overline{b}_j^i}{dt}. \tag{4.18}$$

Сделанные приближения при выводе этого соотношения связаны с представлением обесцениваемого капитала, таким образом, соотношения (4.18) следует рассматривать как справедливые только с точностью до членов первого порядка относительно темпов роста.

4.2 Эффекты изменения цен продуктов

Предполагается, что обсуждаемые в предыдущих разделах величины измерены некоторым стоимостным (денежным) масштабом, при этом, каждая из этих величин например, валовой выпуск X_i, представляет стоимость набора разнообразных продуктов. Оценка (цена) каждого из входящих в набор продуктов может меняться независимо от технологической эволюции, что приводит к изменению величины X_i при неизменном натуральном (фактическом) составе набора. Возникает вопрос о правилах преобразования оцениваемых величин и соотношений между ними при измении цен продуктов.

4.2.1 *Преобразование системы цен*

Все величины в балансовых соотношениях (4.6) и (4.7) оценены при некоторых известных ценах каждого продукта p_j $(j = 1, 2, \dots n)$. Можно полагать, что отношение $\hat{X}_i = X_j/p_j$ представляет величину валового выпуска в условных "натуральных" единицах. При этом предпологаем, что удаётся определить такие цены, что изменение выпусков в "натуральных" единицах (обозначенной знаком ˆ) связаны только с изменением технологии.

В произвольной системе цен значение величин определяется, очевидно, как

$$X_i = p_i \hat{X}_i, \quad Y_i = p_i \hat{Y}_i, \quad Z_i = p_i \hat{Z}_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.19}$$

Цены p_j $(j = 1, 2, \dots n)$ образует изменчивую текущую систему произвольных цен. Стоимость выпуска в некоторой другой, фиксированной определенным способом, системе цен (обозначенными штрихами) определяется как

$$X' = \frac{p'_j}{p_j}\, X_j.$$

Компоненты матриц медленно меняются при технологических изменениия и могут быстро измениться при изменении цен. Чтобы найти правила преобразования матрицы A при переходе от произвольной системы цен к референсной системе цен, переписываем уравнение (4.6), сформулированное в произвольной системе цен, в форме

$$\hat{X}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \frac{p_i}{p_j}\, \hat{X}_i + \hat{Y}_j.$$

Следует полагать, что уравнение баланса охраняет свою форму при любой системе цен, так что матрица затраты–выпуск при новой системе цен должна быть определена как

$$\hat{a}^i_j = a^i_j \frac{p_i}{p_j}, \quad a^i_j = \hat{a}^i_j \frac{p_j}{p_i}. \tag{4.20}$$

Компоненты матрицы A при этом являются безразмерными величинами и потому не зависят от масштаба цен, но при изменении организации производства меняется соотношение цен в различных отраслях, что влияет на значения компонент. Соотношения (4.20) демонстрируют правила преобразования матрицы затраты-выпуск при изменении цен.

При оценке выпусков в уравнениях (4.6) стоимостными единицами значение компонент матрицы затраты–выпуск зависит всегда от системы цен. Однако, можно предполагать, что сведение к "натуральной" форме определяет некоторое независящее от цен представление матрицы, которое является характеристикой производственной системы. При большом количестве отраслей компоненты такой матрицы вычисляются как отношение выпусков в натуральном выражении, но при малом числе отраслей эти величины является отношениями величин в стоимостном выражении, которые, тем не менее, играют роль фундаментальных характеристик производственной системы.

Заметим, что удобно переписать соотношения (4.19) в векторной форме

$$\mathsf{X} = \mathsf{P}\hat{\mathsf{X}}, \quad \hat{\mathsf{X}} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{X}, \qquad \mathsf{Y} = \mathsf{P}\hat{\mathsf{Y}}, \quad \hat{\mathsf{Y}} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Y},$$

где введены матрицы преобразования

$$\mathsf{P} = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{Vmatrix}, \quad \mathsf{P}^{-1} = \begin{Vmatrix} p_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Тогда, правила преобразования (4.20) для технологической матрицы могут быть записаны как

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}\hat{\mathsf{A}}\mathsf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathsf{A}} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}.$$

Матрицы $\hat{\mathsf{A}}$ и A являются подобными матрицами (Korn и Korn, 1968). Чтобы отделить изменения, которые связаны с изменениями технологии от изменений под влиянием изменений цен, следует рассмотреть некоторые инвариантные комбинации компонент матриц. Известно, что подобные матрицы имеют одни и те же собственные значения, которые, таким образом, не зависят от цен.

4.2.2 *Структура цены*

Для того, чтобы записать уравнение для цен продуктов, обратимся к соотношению (4.7) и поделим его на натуральный валовой выпуск отрасли. Тогда уравнение приобретает вид

$$(1 - a^j)\, p_j = \frac{Z^j}{\hat{X}_j}, \quad a^j = \sum_{l=1}^{n} a_l^j \quad j = 1, 2, \dots n.$$

Записанное в правой части соотношения производство стоимости в отрасли Z^j определяется по формуле (2.10) как сумма оплаты труда, оценки использования производственного оборудования и стоимости прибавочного продукта. При необходимости учета денежного обращения отраслевое производство стоимости может быть записано по образцу соотношения (9.44) в более общем виде.

Поскольку матрица A зависит от текущих цен, то записанное выше соотношение не определяет цены p_j непосредственно, а является системой уравнений для цен, и, чтобы записать его в явном виде, переходим, используя соотношение (4.20), к стандартной (по предположению зависящей только от фундаментальных технологических связей, см. раздел 4.2.1) матрице $\hat{\mathsf{A}}$ и определяем систему уравнений для цен

$$p_j - \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k^j p_k = \mathfrak{v}^j + \mathfrak{a}^j + \mathfrak{s}^j, \quad j = 1, 2, \dots n. \tag{4.21}$$

Оплата труда $\mathfrak{v}^j$, использование производственного оборудования $\mathfrak{a}^j$ и прибавочный продукт $\mathfrak{s}^j$ оценениваются на единицу (в натуральном исчислении) продукта отрасли.

Система уравнений (4.21) определяет цены как функции характеристик технологических процессов (матрица $\hat{\mathsf{A}}$, величины $\mathfrak{v}^j$ и $\mathfrak{a}^j$) и прибавочного продукта $\mathfrak{s}^j$. Цены, определённые по уравнению (4.21) при $\mathfrak{s}^j = 0$ яляются характеристиками производственной ситемы и консервативны, они называются *ценами себестоимости*, которые могут быть вычислены при производстве продукта и рассматриваться как некотороя референсная оценка. Прибавочная стоимость $\mathfrak{s}^j$ зависит не только от затрат труда, но и от используемого производственного оборудования, а также от рыночной конъюнктуры (Белкин, 1963).

Цена продукта есть себестоимость p_j° плюс прибавочная стоимость p_j' единицы продукта

$$p_j = p_j^\circ + p_j' \quad j = 1, 2, \dots n \tag{4.22}$$

Первое слагаемое определяется условиями производства, в то время как второе слагаемое зависит от субъективных желаний производителей и объективных условий: от действующих общественных правил, конъюнктуры рынка и прочих обстоятельств. В отличие от цен себестоимости, второе слагаемое изменчиво и может быть как положительным, так и отрицательным.

4.2.3 *Условие совместимости*

Балансовые уравнения должны быть ковариантными и в случае, если выбран другой путь описания с помощью матрицы (4.4). При этом, наряду с уравнением (4.6), имеем уравнение

$$\frac{dX_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_j^i \frac{dX_i}{dt} + \frac{dY_j}{dt}, \tag{4.23}$$

которое при переходе к референсной системе цен с использованием соотношений (4.19) может быть переписано в форме

$$p_j \frac{d\hat{X}_j}{dt} + \hat{X}_j \frac{dp_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_j^i \left(p_i \frac{d\hat{X}_i}{dt} + \hat{X}_i \frac{dp_i}{dt} \right) + p_j \frac{dY_j}{dt} + \hat{Y}_j \frac{dp_j}{dt}.$$

В силу того, что уравнение баланса должно иметь одну и ту же форму для любого набора цен, следует записать два отдельных соотношения: уравнение баланса и уравнение для цен

$$\frac{d\hat{X}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\tilde{a}}_j^i \frac{d\hat{X}_i}{dt} + \frac{d\hat{Y}_j}{dt}, \tag{4.24}$$

$$\hat{X}_j \frac{d\ln p_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\tilde{a}}_j^i \hat{X}_i \frac{d\ln p_i}{dt} + \hat{Y}_j \frac{d\ln p_j}{dt}, \tag{4.25}$$

где, подобно соотношениям (4.10), следует записать

$$\hat{\tilde{a}}_j^i = \tilde{a}_j^i \frac{p_i}{p_j}, \quad \tilde{a}_j^i = \hat{\tilde{a}}_j^i \frac{p_j}{p_i}.$$

Соотношения (4.25) определяют систему алгебраических уравнений для величин

$$\frac{d\ln p_i}{dt}, \quad i = 1, 2..., n.$$

Система может иметь нетривиальное решение, если выполнено следующее условие

$$\left|(\delta_j^i - \tilde{a}_j^i)X_i - Y_j\delta_j^i\right| = 0. \tag{4.26}$$

Если $\tilde{a}_j^i$ не зависит от времени, условие (4.26) оказывается всегда справедливым, в противном случае, это условие является уравнением для темпа роста компонентов матрицы $\tilde{a}_j^i$.

Можно видеть, что цены продуктов не могут быть совершенно произвольными величинами в случае, если соблюдается баланс продуктов. Нетривиальное решение системы (4.25) определяет соотношение между ценами различных продуктов. Однако цены назначаются независимо, и можно представить ситуацию, когда выбраны цены, не удовлетворяющие уравнению (4.25), что приводит к нарушению стоимостного баланса продуктов.

4.2.4 *Динамика отраслевого производства стоимости*

Наряду с соотношением (4.7), можно записать выражение для скорости роста производства стоимости в отрасли

$$\frac{dZ^i}{dt} = (1 - \tilde{a}^i)\frac{dX_i}{dt}. \tag{4.27}$$

Это соотношение, принимая формулы (4.9) во внимание, может быть переписано в форме

$$\frac{dZ^i}{dt} = (1 - \tilde{a}^i)\left(p_i \frac{d\hat{X}_i}{dt} + \hat{X}_i \frac{dp_i}{dt}\right). \tag{4.28}$$

Темп роста отраслевого производства стоимости разделяется на две части: темп, связанный с изменением валовой продукции в постоянных денежных единицах и темп, связанный с изменением индекса цен.

Мы рассматриваем сектор как экономический субъект, который планирует свою деятельность и может принимать решение о количестве валового продукта отрасли. Можно думать, что целью сектора является получение наибольшего количества производства стоимости Z^j. Можно полагать, что увеличение продукции стимулируется увеличением производства стоимости в отрасли. В самом простом случае можно записать

$$\frac{d\hat{X}_i}{dt} = k_i \frac{dZ^i}{dt}. \tag{4.29}$$

Коэффициенты чувствительности k_i $(i = 1, 2..., n)$ показывает, как сектор i реагирует на увеличение производства стоимости. Мы полагаем, что k_i являются неотрицательными и ограниченными из-за возможностей производства

$$k_i < \frac{1}{(1 - \tilde{a}^i)p_i}. \tag{4.30}$$

Отношения (4.28) и (4.29) определяют скорость роста отраслевого производства стоимости

$$\frac{dZ^i}{dt} = \frac{(1 - \tilde{a}^i)X_i}{[1 - k_i(1 - \tilde{a}^i)p_i]p_i} \frac{dp_i}{dt}. \tag{4.31}$$

Из этого соотношения, при помощи соотношений (4.21) и (4.27), можно получить формулы для скорости роста валовых и конечных продуктов

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{X_i}{[1 - k_i(1 - \tilde{a}^i)p_i]p_i} \frac{dp_i}{dt}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.32}$$

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\delta^i_j - \tilde{a}^i_j)X_i}{[1 - k_i(1 - \tilde{a}^i)p_i]p_i} \frac{dp_i}{dt}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.33}$$

Последнее выражение определяет частные производные функции предложения конечного выпуска $Y_j = Y_j(p_1, p_2, ..., p_n)$ в виде

$$\frac{\partial Y_j}{\partial p_i} = \frac{(\delta^i_j - \tilde{a}^i_j)X_i}{[1 - k_i(1 - \tilde{a}^i)p_i]p_i}. \tag{4.34}$$

Можно видеть, что конечный выпуск отрасли является возрастающей функцией цены своего собственного продукта, и убывающей функцией цен всех остальных продуктов.

4.3 Динамика валового и конечного выпуска

Соотношения, указанные в предыдущих разделах, позволяют записать уравнения для валовых и конечных продуктов при зависящих от времени матрицах A и B. Чтобы получить динамическое уравнение для выпуска, обращаемся к уравнению (2.22) для стоимости основного производственного оборудования K^i_j вида j в секторе i, то есть к уравнению

$$\frac{dK^i_j}{dt} = I^i_j - \mu K^i_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{4.35}$$

Соотношение (4.14) позволяет переписать это уравнение в форме

$$b^i_j \frac{dX_i}{dt} + X_i \frac{db^i_j}{dt} = I^i_j - \mu b^i_j X_i, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{4.36}$$

Эта запись представляет систему уравнений для валового продукта X_i, если матрица B и валовые инвестиции I^i_j известны и заданы как функции времени.

4.3.1 *Динамическое уравнение Леонтьева*

Суммируя уравнения (4.36) по индексу i и предполагая, что зависимостью матрицы B от времени можно пренебречь, находим

$$\sum_{i=1}^{n} b^i_j \frac{dX_i}{dt} = I_j - \mu \sum_{i=1}^{n} b^i_j X_i, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.37}$$

Валовые инвестиции продукта j во все сектора I_j определяются, по отношению (2.11), как

$$I_j = Y_j - C_j - G_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{4.38}$$

где C_j - полное личное потребление продукта j, G_j - инвестиции в сберегаемые промежуточные продукты. Инвестиции I_j являются некоторыми долями конечного продукта, что, в силу неотрицательности величин C_j и G_j, может быть удобно записано в виде

$$I_j = s_j Y_j, \quad 0 < s_j < 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{4.39}$$

или, затем, вследствие справедливости уравнения (4.6), как

$$I_j = s_j \sum_{i=1}^{n} (\delta_j^i - a_j^i) X_i, \quad 0 < s_j < 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.40}$$

Величина s_j введена здесь как доля инвестиционных продуктов в конечном продукте сектора j.

Соотношение (4.40) позволяет нам переписать уравнение (4.37) в следующей форме

$$\sum_{i=1}^{n} b_j^i \frac{dX_i}{dt} = s_j \sum_{i=1}^{n} (\delta_j^i - a_j^i) X_i - \mu \sum_{i=1}^{n} b_j^i X_i, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.41}$$

Записанная система динамических уравнений для отраслевых валовых продуктов идентична уравнениям, первоначально сформулированому Леонтьевым (Leontief, 1941). Уравнения могут быть удобно переписаны в векторной форме

$$\mathsf{B} \frac{d\mathsf{X}}{dt} = [\,\mathsf{S}(\mathsf{E} - \mathsf{A}) - \mu \mathsf{B}\,]\,\mathsf{X} \tag{4.42}$$

где S - символ для диагональной матрицы со значениями s_j на диагонали.

4.3.2 *Сбалансированный рост*

Уравнение (4.41) применимо к реальной системе, если изменениями технологических матриц A и B можно пренебречь. В предполагаемом случае, когда все параметры в уравнениях (4. 41) постоянны, валовой продукт может быть найден в форме

$$X_j(t) = X_j(0) e^{\sigma t}, \tag{4.43}$$

где начальные значения $X_j(0)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$[\,\mathsf{S}(\mathsf{E} - \mathsf{A}) - (\mu + \sigma)\mathsf{B}\,]\mathsf{X}(0) = 0. \tag{4.44}$$

Решение (4.43) определяет траекторию сбалансированного (homothetic) роста, когда темпы роста валовых продуктов во всех секторах одинаковы.

Нетривиальные решения уравнений (4.44) существуют, если определитель системы равен нолю, то есть,

$$|\,\mathsf{S}(\mathsf{E}-\mathsf{A})-(\mu+\sigma)\mathsf{B}\,|=0. \tag{4.45}$$

Легко видеть что, если в системе производства существует сектор, который не создает продукты для инвестиций, детерминант (4.45) тождественно равен нолю при любом значении σ. Однако, темп роста продукции ограничен.

Темп роста для сбалансированной траектории может быть вычислен с помощью специально разработанных (Neumann, 1937; Черемных, 1982) методов. Предполагается, что уравнения (4.41) могут быть записаны для дискретных моментов времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, используя аппроксимацию

$$X_i = X_i(t), \quad \frac{dX_i}{dt} = X_i(t+1) - X_i(t),$$

что подразумевает

$$\sum_{i=1}^{n} b_j^i X_i(t+1) = \sum_{i=1}^{n} \left[s_j(\delta_j^i - a_j^i) + (1-\mu)b_j^i\right] X_i, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Последнее уравнение может быть переписано в форме неравенства

$$\alpha\mathsf{B}\mathsf{X} \le (\,\mathsf{E}-\mathsf{A}-(1-\mu)\mathsf{B}\,)\mathsf{X}, \tag{4.46}$$

если ввести отношение роста

$$\alpha = \min_{i=1\div n} \frac{X_i(t+1)}{X_i(t)}.$$

Это величина зависит от вектора X, который может быть выбран таким образом, что α принимает наибольшее значение

$$\hat{\alpha} = \max_{\mathsf{X}} \alpha(\mathsf{X}).$$

Рассмотренная процедура определяет возможную сбалансированную траекторию наискорейшего роста

$$X_i(t) = X_i(0)\hat{\alpha}^t = X_i(0)e^{\sigma t}. \tag{4.47}$$

4.3.3 *Потенциальные инвестиции*

Теперь, мы постараемся избавиться от ограничений предыдущих разделов и сформулировать уравнения для случая, когда компоненты технологических матриц A и B являются функциями времени. При комбинации формул (4.6) и (4.14), можно найти, что конечный продукт может быть записан в виде

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i \, K^i, \quad \xi_j^i = \frac{\delta_j^i - a_j^i}{b^i}, \tag{4.48}$$

где введена матрица предельных производительностей отраслевого капитала с компонентами ξ_j^i. Отраслевой капитал подчиняется динамическому уравнению (2.26), то есть уравнению

$$\frac{dK^i}{dt} = I^i - \mu K^i, \tag{4.49}$$

где отраслевые инвестиции I^i определяются, согласно формулам (4.20) и (4.39), системой алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{b_j^i} I^i = s_j Y_j - \sum_{i=1}^{n} K^i \frac{d\overline{b}_j^i}{dt}. \tag{4.50}$$

Уравнения (4.50) не даёт возможности найти единственные значения отраслевых инвестиций I^i: число уравнений оказывается меньшим, чем число переменных. При заданных значениях параметров задачи, уравнения (4.48) - (4.50) определяют набор траекторий многоотраслевой системы. Чтобы выделить единственную траекторию развития производственной системы, следует дополнить систему уравнений (4.50) некоторыми условиями. О любом дополнительном условии, которое выделяет единственную траекторию развития, можно говорить как о принципе развития.

Траектория наискорейшего роста

В качестве принципа развития удобно использовать некоторый критерий оптимальности; например, критерий, связанный с темпами роста конечного продукта

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i \, \frac{dK^i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} K^i \, \frac{d\xi_j^i}{dt}. \tag{4.51}$$

Можно потребовать, например, чтобы скорость роста конечного продукта была наибольшей при заданной технологии, то есть,

$$\max \frac{dY}{dt} = \max \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(I^i - \mu K^i\right), \quad \xi^i = \sum_{j=1}^{n} \xi^i_j, \tag{4.52}$$

в то время как соотношение (4.50) следует рассматривать как ограничения, которые следует переписать в форме

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{b^i_j} I^i \leq s_j Y_j. \tag{4.53}$$

В результате решения задачи максимизации определяются значения инвестиций, которые являются, конечно, функциями параметров проблемы

$$\tilde{I}^i = \tilde{I}^i(\xi^i, b^i_j, s_j, Y_j, K^i).$$

Теперь, динамические уравнения (4.48)-(4.49) вместе с процедурой вычисления инвестиций (4.52)-(4.53) определяют единственную траекторию - траекторию наискорейшего роста. Можно вообразить, что траектория развития находится численными методами, при этом задачу максимизации (4.52)-(4.53) следует решать стандартными методами линейного программирования на каждом шаге решения задачи Коши (Cauchy). В рассмотренном случае, принцип развития означает, что общество управляет своими ресурсами наилучшим способом.

Сбалансированный рост

Вместо описанной процедуры вычисления инвестиций, некоторые другие процедуры могут быть изобретены для того, чтобы определить однозначно траекторию развития. Самым простым способом, потенциальные инвестиции могут быть определены как инвестиции для сбалансированных траекторий. Сбалансированность производственной системы выступает в качестве принципа развития.

В этом случае, темпы роста всех отраслей равны темпу роста всей системы, а инвестиции, по уравнениям (4.39) и (4.48), могут быть представлены в виде

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} s_j\, \xi^i_j\, K^i, \quad \xi^i_j = \frac{\delta^i_j - a^i_j}{b^i}.$$

Это выражение позволяет нам определять темп потенциального роста валового продукта любого сектора как темп роста всего валового продукта

$$\tilde{\delta} = -\mu + \frac{1}{K} \sum_{i,j=1}^{n} s_j \, \xi_j^i \, K^i. \tag{4.54}$$

Заключительные замечания

Заметим, что в этой главе предполагается, что полное личное потребление продукта C_j и инвестиции в стратегические проекты G_j заданы. В этом случае, инвестиции, определяемые тем или иным образом на основе записанных уравнений следует считать некоторыми *потенциальными инвестициями* $\tilde{I}^i$. Реальные инвестиции определяются при более полном учёте существующих ограничений на развитие системы. Мы сможем убедиться, что доступность труда и замещающей работы налагают ограничения на развитие производственной системы и должны быть включены в теорию. При этом в любом случае реальные инвестиции не превышают потенциальных инвестиций, а реальные величины конечного личного потребления и потоков промежуточных продуктов оказываются следствиями развития системы. Мы будем подробнее обсуждать этот вопрос в последующих главах и вернёмся к многоотраслевым уравнениям в главе 9.

4.4 Предприятие и базисные технологические процессы

С микроэкономической точки зрения, система производства состоит из многочисленных предприятия, каждый из которых включает один или более *базисных технологических процессов.* Последние можно рассматривать как *атомы* производственной системы. Методы описания возможностей предприятия, состоящего из конечного или бесконечного набора базисных технологических процессов были предложены Нейманом (Neumann, 1937) и Гейлом (Gale, 1960), соответственно. Мы рассмотрим конечный набор базисных технологических процессов, а именно, модель предприятия Неймана.

Каждое предприятие производит один или несколько продуктов, тогда как одновременно потребляет некоторые продукты. Другими словами, предприятие преобразовывает затраты $x_j, x_i, \ldots$, где индексами $j,\ \ i, \ldots$ определён набор продуктов, в выпуск: $x_l, x_m, \ldots$, где

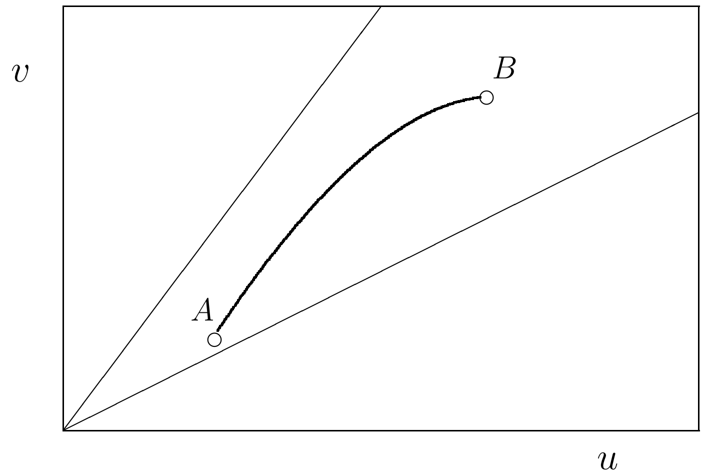

Рисунок 4.1 Пространство затраты – выпуск
Все траектории (подобные траектории A B) расположены в секторе, ограниченном прямыми линиями, представляющими базисные технологические процессы.

индексы продуктов l, $m, \ldots$ также фиксированы. Удобно определить векторы затрат и выпуска продуктов u и v с неотрицательными компонентами u_k и v_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Некоторые из компонент этих векторов, очевидно, должны быть равны нолю.

Мы предполагаем, что компоненты векторов измерены в единицах стоимости, таким образом, конечный выпуск предприятие

$$y = \sum_{j=1}^{n} (v_j - u_j) \tag{4.55}$$

является вкладом предприятия в валовой национальный продукт.

Пара векторов (u, v) характеризуют технологию, используемую в производстве, или, выражаясь по-другому, технологический процесс определяется как пара векторов (u, v). Технологический процесс может быть изображен точкой в Евклидовом пространстве размерности $2n$, как изображено схематично на рис. 4.1.

Можно предположить, что существуют базисные технологические процессы с постоянными характеристиками, каждый из который не может быть разделен и изменен, как, например, линия сборки автомобилей. Единственное действие, которое менеджер может выполнить, является включение или выключение процесса. Можно допустить, что предприятие состоит из набора базисных технологических процессов, которые могут использоваться в различных комбинациях, так что технологический процесс предприятия может быть представлен как разложение по базисным технологическим процессам

$$(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = \sum_{j=1}^{r} (\mathsf{a}^j, \mathsf{h}^j) z_j, \tag{4.56}$$

где $z_j \geq 0$ – интенсивность использования базисного технологического процесса, помеченного индексом j.

При известных базисных технологических процессах и произвольном векторе $\mathsf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$, отношение (4.56) определяет возможные технологические процессы предприятия, то есть, технологический набор, который является определенной характеристикой предприятия.

Задача предприятия и исследователя предприятия заключается в том, чтобы найти такой вектор z, чтобы конечный выпуск (4.55) имел бы наибольшую величину.

Удобно использовать для компонентов векторов затрат и выпуска представление

$$u_i = \sum_{j=1}^{r} a_i^j z_j, \quad v_i = \sum_{j=1}^{r} h_i^j z_j, \tag{4.57}$$

где a_i^j и h_i^j - компоненты матриц затрат и выпуска, A и H, соответственно. Можно сказать, что модель Неймана задана, если матрицы A и H заданы.

Тогда, конечный продукт предприятия может быть записан следующим образом

$$y(\mathsf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (h_i^j - a_i^j) z_j. \tag{4.58}$$

Можно ввести потенциальное отношение выпуск-затраты

$$\alpha(\mathsf{z}) = \min_{j=1,2,\ldots,n;\ v_i \neq 0} \frac{v_i}{u_i}, \tag{4.59}$$

которое зависит от интенсивности $\mathsf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$.

Так как конечная выпуск неотрицателен, то из отношения (4.59) следует

$$\mathsf{Az} \leq \mathsf{Hz}$$

или, при использовании определения (4.59),

$$\alpha \mathsf{Az} \leq \mathsf{Hz}. \tag{4.60}$$

Итак, задача состоит в том, чтобы найти наибольший темп роста α. В этом случае, величина (4.55) также приобретает наибольшее значение. Можно видеть, что обсуждаемая задача подобна проблеме, которая была рассмотрена в предыдущем разделе (ср. уравнения 4.46 и 4.60).

Можно предположить, что интенсивность z является функцией времени, так что модель фон Неймана может описывать динамические процессы или, в геометрических терминах, траектории в пространстве затраты - выпуск (рис. 4.1). Если базисные технологические процессы остаются неизменными в течение времени, вектор $\mathsf{z} = constant$ и траектория производства оказывается прямой линией в технологическом пространстве, что называется лучом Неймана. В противном случае, задача становится более сложной.

Сотни статей были написаны о свойствах моделей роста типа Неймана, сформулированы золотые правила накопление капитала, теоремы магистрали и многое другое, с чем можно познакомиться, например, по книгам Ланкастера (Lancaster,1970) и Ашманова (Ашманов,1984). Однако не нужно забывать, что все это относится к потенциальным траекториям развития производственной системы.

Литература

Ашманов С.А. (1984) Введение в математическую экономику. Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, Москва.

Белкин В.Д. Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. М.: Экономиздат, 1963.

Черемных Ю.Н. (1982) Анализ поведения траекторий динамики народнохозяйственных моделей. Наука, Москва.

Gale D. (1960) The Theory of Linear Economic Models. McGraw-Hill, Aucland *etc.*

Korn G.A. and Korn T.M. (1968) Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York *etc.* Перевод: Корн Г. и Корн Т., Справочник по математике. Для научных работноков и инженеров. Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, Москва, 1974.

Lancaster K. (1970) Mathematical Economics. MacMillan Company, New York *etc.* Перевод: Ланкастер К., Математическая экономика. Советсое Радио, Москва, 1972.

Leontief W.W. (1936) Quantitative input and output relations in the economic system of the United States. Review of Economic Statistics 18: 105-125.

Leontief W.W. (1941) The Structure of the American Economy 1919–1939. Harvard University Press, Cambridge MA.

Leontief W.W. (1986) Input-Output Economics, 2nd Ed. Oxford University Press, New York, Oxford.

Neumann J. von (1937) Über ein okonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloqueiums 8: 73-83.

Sraffa P. (1975) Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Citique of Economic Theory. Cambridge University Press, Cambridge *etc.*