

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДENA ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. Н. ПОКРОВСКИЙ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА
РАЗБАВЛЕННЫХ
СУСПЕНЗИЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1978

УДК 532.135 : 539.55

Монография посвящена изложению теории, описывающей динамическое поведение разбавленных суспензий — смесей вязких жидкостей с неподвижными макроскопическими частицами. Теория имеет приложения как к собственно суспензиям, так и к объектам, содержащим большие молекулы, например, к растворам полимеров. Изложенные методы используются при изучении жидкостей и жидких кристаллов.

Книга предназначена специалистам в области физики и механики жидкостей, полимеров, дисперсных и структурно-неоднородных систем, а также аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

Табл. 5, ил. 9, библиогр. 76 назв.

Ответственный редактор
доктор технических наук
С. Т. МИЛЛЕЙКО

В. П. Нокровский
СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
РАЗБАВЛЕННЫХ СУСПЕНЗИЙ

Утверждено к печати
Отделением ордена Ленина Института химической физики

Редактор С. Л. Орник. Редактор издательства М. Г. Макаренко
Художник С. А. Смирнова. Художественный редактор Н. И. Власик
Технический редактор А. М. Сатарова. Корректор Н. А. Татаева

ИБ № 7594

Сдано в набор 20.03.78. Подписано к печати 02.10.78.
Т-1834. Формат 84×108/32. Бумага № 1.

Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 7,14 Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 1200 экз. Тип. зак. 327
Цена 80 коп.

Издательство «Наука» 117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

П 20303—414 БЗ—31—9—1978 © Издательство «Наука», 1978
055 (02)—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистическая механика суспензий начала развиваться в связи с изучением свойств молекулярных жидкостей, растворов полимеров и жидких кристаллов и к настоящему времени оформилась в раздел статистической механики, по своим методам отличный от статистической механики газов, жидкостей и твердых тел.

Объектом статистической механики суспензий являются взвеси твердых частиц произвольной формы в вязкой жидкости или в жидкости с более сложными свойствами. Предполагается, что частицы велики по сравнению с молекулярными размерами, но достаточно малы, так что принимают участие в тепловом движении, т. е. совершают броуновское движение, которое для частиц суспензии может быть поступательным и вращательным.

Задача статистической механики суспензий состоит в том, чтобы по известному строению и известному поведению составляющих определить свойства, характеризующие суспензию в целом. При этом особый интерес представляют динамика и релаксационные процессы в суспензиях.

К настоящему времени разными авторами получены различными методами фактически тождественные результаты, сформулированы уравнения движения суспензии осесимметричных частиц. Выяснило, что движение суспензии не описывается, вообще говоря, законами движения ньютонаской жидкости и что суспензия является нелинейной вязкоупругой жидкостью и может служить примером, демонстрирующим поведение жидкостей с несферическими молекулами.

Отметим, что поскольку при этом интересуются усредненными свойствами суспензии, то размеры измери-

тельной части прибора, в котором может рассматриваться супензия, должны значительно превышать расстояние между частицами. Это предположение вместе с указанными ранее условиями определяет соотношение между характерными масштабами:

$$\text{Межатомные расстояния} \ll \frac{\text{Размеры частиц}}{\text{междуди частичами}} \ll \frac{\text{Расстояние между частицами}}{\text{размеры прибора}}$$

В типичных обстоятельствах частицы супензии должны иметь размеры 10^{-7} — 10^{-4} см.

Задачи, возникающие тогда, когда одно из указанных условий не выполняется, уже выходят за рамки статистической механики разбавленных супензий. Однако случай, когда размеры частиц сопоставимы с расстоянием между частицами, рассматривается статистической механикой перебалансированных супензий. Определение свойств супензий в этом случае является более сложной проблемой, которая еще не рассмотрена в полном объеме.

В этой работе, которая имеет в основном обзорный характер, рассмотрены свойства разбавленной супензии недеформируемых частиц, главным образом эллипсоидов вращения, в вязкой жидкости. С точностью до членов первого порядка по объемной концентрации частиц формулируются общие результаты теории процессов переноса в супензиях и приведен ряд примеров, иллюстрирующих нелинейное поведение супензии.

Автор признателен А. И. Вольперту, В. В. Гогосову, М. Р. Короткиной, Л. Н. Питаевскому, Ю. И. Шмакову за полезные замечания, которые они высказали при чтении рукописи, а также Т. И. Хуртиной и А. М. Сливиной за помощь, оказанную при работе над книгой.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $a \equiv a_1, b \equiv a_2, c \equiv a_3$ — полуоси эллипсоидальной частицы;
 D — коэффициент вращательной диффузии;
 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ — полная производная по времени;
 e_j — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии частицы;
 E_j — напряженность поля;
 h_j — единичный вектор в направлении поля;
 $L_j = -e_{jls}L_{ls}/2$ — внешний момент сил, действующий на частицу;
 p — давление;
 $q = ab^2\gamma/3$;
 T — температура, выраженная в энергетических единицах;
 u_j — скорость движения частицы;
 v_j — скорость жидкости;
 w (е) — функция распределения ориентаций осесимметричных частиц;
 $\alpha, \beta, \xi, \chi, \rho$ — безразмерные параметры, входящие в теплород напряжений и определенные формулами (3.2.8);
 γ — коэффициент, определенный формулой (4.1.4);
 $\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — симметризованный теплород градиентов скорости;
 δ — форм-фактор коэффициента вращательной диффузии, определенный формулой (2.6.12);
 δ_{ik} — символ Кронекера; $\delta_{ik} = 1$, если $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ в остальных случаях;
 ε_{ik} — тензор диэлектрической проницаемости;
 η — коэффициент сдвиговой вязкости супензии;
 $\bar{\eta}$ — коэффициент продольной вязкости супензии;

η_0 — коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, в которой взвешены частицы;
 $\kappa = \mu E/T$;
 $\lambda = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$;
 μ_j — постоянный дипольный момент частицы;
 v — характеристическая сдвиговая вязкость суспензии;
 \bar{v} — характеристическая продольная вязкость суспензии;
 $v_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ — тензор градиентов скорости;
 ξ^α — термодинамический внутренний параметр;
 $\xi_i = \langle e_i \rangle - \langle e_i \rangle_0$;
 $\xi_{ik} = \langle e_i e_k \rangle - \langle e_i e_k \rangle_0$;
 $\sigma = q E^2 / T$;
 σ_{ik} — тензор напряжений;
 $\tau_\alpha = 1/\alpha (\alpha + 1) D$ — времена релаксации ориентации частицы без поля;
 $\tau^\perp, \tau^\parallel$ — «поперечное» и «продольное» времена релаксации полярной частицы в поле;
 $\tau^{(\alpha)}$ — времена релаксации ориентации неполярной частицы в поле;
 φ — объемная доля твердой фазы;
 $\omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ — антисимметризованный тензор градиентов скорости;
 $\Omega_i = -e_{ijs}\Omega_{js}/2$ — скорость вращения частицы.

Трехмерные тензорные индексы обозначены латинскими буквами. Принято правило суммирования по дважды повторяющимся индексам. Аксиальные векторы записываются также в тензорной форме. Компоненты связаны соотношениями

$$A_{ik} = -e_{ikl} A_l, \quad A_l = -\frac{1}{2} e_{lis} A_{js},$$

где e_{ikl} — антисимметричный единичный вектор, $e_{123} = 1$, $e_{ikl} = 0$, если какие-либо индексы одинаковы. При замене местами двух любых индексов тензор e_{ikl} меняет знак.

Векторное произведение $[xy]_{ik} = x_k y_i - x_i y_k$ или $[xy]_i = e_{ikl} x_k y_l$.

Угловыми скобками обозначено усреднение по ориентациям, выполняемое по правилу

$$\langle B \rangle = \int B w(\mathbf{e}) \delta(1 - \mathbf{e}^2) d\mathbf{e}.$$

В ссылках на формулы указаны глава, параграф и номер формулы в параграфе. Например, (2.5.8) обозначает: формула (8) § 5 главы 2; (3.1) — формула (4) § 3 той же главы, где приведена ссылка.

Глава 1

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Законы сохранения для деформируемой системы

Общий вид уравнений переноса с точностью до некоторых неопределенных функций для системы с произвольной структурой, в том числе и для суспензий, рассматриваемых как сплошные среды, устанавливается [1, 2] на основе законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.

Сплошная среда характеризуется плотностью, которая имеет смысл средней плотности и является функцией координат и времени:

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t).$$

Движение сплошной среды описывается вектором скорости с тремя компонентами, которые зависят от координат и времени:

$$v_i = v_i(\mathbf{x}, t).$$

Скорость движения v является некоторой средней макроскопической наблюдаемой скоростью.

Записываем в форме уравнений непрерывности закон сохранения массы

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho v = 0, \quad (1.1)$$

где ρv — плотность потока массы; закон сохранения импульса

$$\partial \rho v_i / \partial t + \partial \Pi_{ik} / \partial x_k = \sigma_i, \quad (1.2)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса; σ_i — плотность сторонних действующих на жидкость объемных сил;

закон сохранения энергии

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad (1.3)$$

где \mathbf{q} — плотность потока энергии;

закон сохранения полного момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (J_{ik} + S_{ik}) + \frac{\partial G_{ikl}}{\partial x_l} = N_{ik} + x_i \sigma_k - x_k \sigma_i, \quad (1.4)$$

где $J_{ik} = \rho(x_k v_i - x_i v_k)$ — плотность внешнего момента количества движения; S_{ik} — плотность внутреннего момента количества движения; G_{ikl} — плотность полного потока момента количества движения; N_{ik} — плотность сторонних действующих на жидкость моментов сил, распределенных по объему. Кроме того, мы должны добавить закон изменения плотности внутреннего момента количества движения

$$\partial S_{ik}/\partial t + \partial v_l S_{ik}/\partial x_l + \partial g_{ikl}/\partial x_l = G_{ik} \quad (1.5)$$

(где G_{ik} — плотность момента сил, действующего на структурные элементы системы; g_{ikl} — плотность неконвективного потока момента количества движения) и уравнение для изменения плотности энтропии

$$\partial \rho s / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{s} + \mathbf{H}) = \Sigma,$$

где \mathbf{H} — плотность неконвективного потока энтропии; Σ — положительная функция возникновения энтропии — производство энтропии.

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\rho(\partial s/\partial t + v_i \partial s/\partial x_i) + \operatorname{div} \mathbf{H} = \Sigma. \quad (1.6)$$

Если система находится в равновесии, то плотность энтропии не меняется, существует только конвективный перенос энтропии (идеальная жидкость) и потому

$$\partial s/\partial t + v_i \partial s/\partial x_i = 0. \quad (1.7)$$

При локально-равновесных процессах энтропия увеличивается, причем ее возникновение можно связать с выделением тепла в единице объема или, иначе, диссилиацией энергии

$$\rho(\partial s/\partial t + v_i \partial s/\partial x_i) = \Phi/T. \quad (1.8)$$

Если в системе не реализуется локальное равновесие, то

$$\rho(\partial s/\partial t + v_i \partial s/\partial x_i) > \Phi/T.$$

В этом случае справедливо общее соотношение (1.6) с функциями \mathbf{H} и Σ , которые подлежат определению.

Выразим плотность импульса через тензор напряжений

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}, \quad (1.9)$$

после чего уравнение (1.2) перепишем в виде

$$\rho(\partial v_i/\partial t + v_k \partial v_i/\partial x_k) = \partial \sigma_{ik}/\partial x_k + \sigma_i. \quad (1.10)$$

Исходя из определения момента количества движения, запишем теперь с помощью уравнений (1.4) и (1.10) изменение внешнего момента количества движения

$$\frac{\partial J_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial v_l J_{ik}}{\partial x_l} = \sigma_{ki} - \sigma_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il}) - x_i \sigma_k + x_k \sigma_i. \quad (1.11)$$

Суммируя уравнения (1.5) и (1.11), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (J_{ik} + S_{ik})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} [(J_{ik} + S_{ik}) v_l + (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il}) + g_{ikl}] &= G_{ik} - \sigma_{ik} + \sigma_{ki} - x_i \sigma_k + x_k \sigma_i. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сравниваем последнее уравнение с (1.4) и определяем

$$G_{ikl} = (J_{ik} + S_{ik}) v_l + (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il}) + g_{ikl}, \quad (1.13)$$

$$G_{ik} = N_{ik} - \sigma_{ik} + \sigma_{ki}. \quad (1.14)$$

Теперь уравнения (1.4) и (1.5) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (J_{ik} + S_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_l} [(J_{ik} + S_{ik}) v_l + (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il}) + g_{ikl}] &= N_{ik} - x_i \sigma_k + x_k \sigma_i, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (v_l S_{ik} + g_{ikl}) = N_{ik} + \sigma_{ik} - \sigma_{ki}. \quad (1.16)$$

Все полученные до сих пор выражения имеют общий характер и не связаны с какой-либо спецификой материала. Однако система уравнений (1.4), (1.3), (1.6), (1.10), (1.15), (1.16) определена через неизвестные

функции q_i , H_i , Σ , σ_{ik} и g_{ik} . Чтобы конкретизировать систему далее и выразить плотность диссипации энергии или производство энтропии, т. е. изменение энтропии в единицу времени, и плотность потока энергии через введенный тензор напряжений, нужно воспользоваться выражением для изменения энергии конкретной системы.

Прежде чем перейти к дальнейшей конкретизации полученных уравнений, оценим здесь влияние внутреннего момента на движение жидкости. Пусть a — характерный размер внутреннего элемента, тогда $S_{ik} \approx \rho a v$, $\sigma_{ik} \approx \eta v/a$, где η — коэффициент вязкости, и из уравнения (1.16) найдем выражение для характерного времени выравнивания вращательного движения

$$\tau \approx \rho a^2/\eta. \quad (1.17)$$

Для времен движения, значительно превышающих время (1.17), движение таково, что не происходит запаздывания внутренних моментов, и из уравнения (1.16) следует

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \dots = N_{ik}. \quad (1.18)$$

В этом случае несимметричность тензора напряжений связана только с внешними моментами и закон сохранения момента количества движения выполняется автоматически, являясь следствием закона сохранения количества движения. Для рассматриваемых далее суспензий $a \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$ см, $\eta \approx 10^{-2}$ пас., $\rho \approx 1$ г/см³ и время выравнивания в этом случае $\tau \approx 10^{-10} \div 10^{-8}$ с. Процессы со столь малым временем выравнивания в суспензиях несущественны по сравнению с другими процессами, поэтому далее считаем, что внутреннее вращение соответствует внешнему. Общий случай обсуждался в работах [2—4].

§ 2. Термодинамические потоки в деформируемой системе

Термодинамическое состояние системы при равновесии описывается [5] различными параметрами, например, плотностью ρ (или удельным объемом v) и давлением p , а также температурой T . Поскольку в принципе всегда существует уравнение состояния, связывающее эти величины, $f(T, v, p) = 0$, то для полной характеристики

системы в равновесии достаточно двух из трех указанных величин.

Равновесное изменение внутренней энергии единицы массы однородной системы e связано с изменением удельного объема v и энтропии на единицу массы s известной [1, 5] формулой

$$de = Tds - pdv. \quad (2.1)$$

В дальнейшем удобно использовать внутреннюю энергию, рассчитанную на единицу объема $E_0 = \rho e$. Умножая (2.1) на ρ и преобразуя, находим

$$dE_0 = \rho T ds + [p/\rho - e] d\rho.$$

Так как выражение в скобках есть энтальпия единицы массы, то

$$dE_0 = \rho T ds + w d\rho. \quad (2.2)$$

При равномерном и прямолинейном движении системы термодинамическое равновесие, очевидно, не нарушается. Однако, если существуют градиенты скорости, то деформируемая система, вообще говоря, не находится в равновесии даже локально. Состояние системы при этом описывается, согласно [2, 5], дополнительно некоторыми внутренними переменными ξ^α , где α обозначает номер переменной и ее тензорные индексы. Считаем, что набор ξ^α таков, что полностью характеризует отклонение системы от равновесия. В равновесном состоянии все значения внутренних параметров равны своим равновесным значениям ξ_e^α , которые полностью определяются значениями двух термодинамических параметров, например, энтропией и плотностью:

$$\xi_e^\alpha = \xi_e^\alpha(s, \rho).$$

При изменении термодинамических параметров равновесное значение внутренних параметров, разумеется, также меняется, однако существенно не само абсолютное значение внутреннего параметра, а его отклонение от равновесного значения $\xi^\alpha - \xi_e^\alpha$. Эту величину в дальнейшем будем обозначать просто через ξ^α .

Предполагается [5], что при этом могут быть введены локальные термодинамические функции, которые теперь зависят дополнительно от внутренних переменных. Например, внутренняя энергия единицы объема

$E_0 = E_0(s, \rho, \xi^\alpha)$ и, следовательно, плотность внутренней энергии записывается в движущейся системе координат

$$dE_0 = \rho T ds + w dp + TX_\alpha d\xi^\alpha, \quad (2.3)$$

где $X_\alpha = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E_0}{\partial \xi^\alpha} \right)_{s,p} = - \left(\frac{\partial \rho s}{\partial \xi^\alpha} \right)_{E,p}$. Величины T , w и X_α являются функциями переменных s , ρ , ξ^α . В равновесном состоянии все $\xi^\alpha = 0$, при этом T и w принимают свое равновесное значение, а $X_\alpha = 0$, так что (2.3) переходит в равновесную форму (2.2). При малых ξ^α «термодинамические силы» X_α могут быть разложены в ряд, начинаяющийся с члена первого порядка. В первом приближении

$$X_\alpha = B_{\alpha\gamma} \xi^\gamma. \quad (2.4)$$

Кинетическая энергия единицы объема движущейся жидкости (без учета кинетической энергии внутренних степеней свободы) равна $\rho v^2/2$, и поэтому изменение полной энергии единицы объема движущейся жидкости с учетом выражения (2.3) записываем в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + TX_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t}.$$

Полученное уравнение с помощью формул (1.4), (1.6) и (1.10) преобразуем к выражению, имеющему вид закона сохранения энергии, при этом используем соотношение

$$dw = Tds + \rho^{-1}dp + (T/\rho) X_\alpha d\xi^\alpha.$$

После вычислений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho v_k \left(w + \frac{v^2}{2} \right) - v_i (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) + TH_k] = \\ = T \Sigma - (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) v_{ik} + H_i \nabla_i T + T \frac{d\xi^\alpha}{dt} X_\alpha, \end{aligned}$$

где $v_{ik} = dv_i / dx_k$ — тензор градиентов скорости. Сравнивая последнее уравнение с уравнением (1.3), находим

$$\begin{aligned} q_k &= \rho v_k (w + v^2/2) - v_i (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) + TH_k, \\ \Sigma &= (\sigma_{ik} + p \delta_{ik}) \frac{1}{T} v_{ik} - H_i \frac{1}{T} \nabla_i T - \frac{d\xi^\alpha}{dt} X_\alpha. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Входящие в последнее соотношение неизвестные величины $\sigma_{ik} + p \delta_{ik}$, H_i и $d\xi^\alpha/dt$ следует считать функциями v_{ik} , $\nabla_i T$ и X_α или, поскольку X_α являются функциями

переменных ξ^α , функциями величин ¹ v_{ik} , $\nabla_i T$ и ξ^α :

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} + p \delta_{ik} &= f_{ik}(v_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma), \\ H_i &= H_i(v_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma), \\ d\xi^\alpha/dt &= g^\alpha(v_{js}, \nabla_l T, \xi^\gamma). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для дальнейшего определения неизвестных функций (2.6) важное значение имеет использованный впервые, по-видимому, Олдройдом [6] принцип ², согласно которому во всех системах координат, отличающихся друг от друга преобразованием координат

$$x_i = a_{ik} x'_k + c_i \quad (2.7)$$

(где a_{ik} — зависящий от времени ортогональный тензор и c_i — зависящий от времени вектор), все процессы протекают одновременно и, следовательно, должны описываться одинаковым образом [7].

Очевидно, этот принцип выполняется приближенно для случаев, когда все процессы происходят настолько медленно, что силами инерции можно пренебречь.

Укажем те ограничения, которые накладывает указанный принцип на вид уравнений переноса. Для этого рассмотрим тензор градиентов скорости, который может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, определяемых следующим образом:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Тензор градиентов скорости преобразуется по правилу

$$v_{ik} := a_{il} a_{kj} v'_{lj} + \dot{a}_{il} a_{kl}, \quad (2.8)$$

где точка означает дифференцирование по времени. Симметризованный тензор градиентов скорости преобразуется

¹ Вместо градиента скорости в уравнениях (2.6) может использоваться также другая кинематическая характеристика — тензор градиентов перемещений $\lambda_{ik}(t, t') = \partial x_i(t)/\partial x_k(t')$, где $x_i(s)$ — координата точки тела в момент s .

² Этот принцип иногда называют принципом материальной объективности.

как независящий от времени тензор:

$$\gamma_{ik} = a_{il}a_{kj}\gamma_{lj},$$

а антисимметризованный — следующим образом:

$$\omega_{ik} = a_{il}a_{kj}\omega'_{lj} + \dot{a}_{il}a_{kl}. \quad (2.9)$$

Пусть, например, один из внутренних параметров, закон изменения которого нас интересует, является тензором произвольного ранга и преобразуется подобно координатам (контравариантно):

$$\xi_{ik\dots l} = a_{ij}a_{ks\dots l}a_{ln}\xi'_{js\dots n}, \quad \xi'_{js\dots n} = a_{pj}a_{ms\dots l}a_{qn}\xi_{pm\dots q}.$$

Дифференцируя $\xi_{ik\dots l}$ по времени, находим

$$\frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} = \dot{a}_{ij}a_{pj}\xi_{pk\dots l} + \dot{a}_{kj}a_{mj}\xi_{sim\dots l} + \dots$$

$$\dots + \dot{a}_{lj}a_{nj}\xi_{ik\dots n} + a_{ij}a_{ks\dots l}a_{ln}\frac{d\xi'_{js\dots n}}{dt}.$$

Из выражений (2.8) и (2.9) находим, что входящая в последнее соотношение комбинация определяется с точностью до произвольной постоянной:

$$\dot{a}_{il}a_{kl} = \omega_{ik} + \kappa\gamma_{ik} - a_{is}a_{kj}(\omega'_{sj} + \kappa\gamma'_{sj}).$$

Пусть для определенности $\kappa = 0$. С помощью последнего соотношения производная внутреннего параметра по времени записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} &= \omega_{ip}\xi_{spk\dots l} + \omega_{km}\xi_{sim\dots l} + \dots \\ &\dots + \omega_{ln}\xi_{ik\dots n} + a_{ij}a_{ks\dots l}a_{ln}\left(\frac{d\xi'_{js\dots n}}{dt} - \omega'_{jq}\xi_{qs\dots n} - \right. \\ &\left. - \omega_{sq}\xi'_{jq\dots n} - \dots - \omega'_{nq}\xi'_{js\dots q}\right). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что комбинация, которую называют производной Яумана тензора $\xi_{ik\dots l}$

$$\begin{aligned} \frac{D\xi_{ik\dots l}}{Dt} &= \frac{d\xi_{ik\dots l}}{dt} - \omega_{ip}\xi_{spk\dots l} - \omega_{km}\xi_{sim\dots l} - \dots \\ &\dots - \omega_{ln}\xi_{ik\dots n}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

преобразуется как независящий от времени тензор. Аналогичным образом рассмотрение может быть выполнено для ковариантных тензоров.

Таким образом, уравнения (2.6) могут быть записаны теперь в виде, ковариантном по отношению к преобразованию (2.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} + p\delta_{ik} &= f_{ik}(\gamma_{js}, \nabla_l T, \xi^v), \\ H_i &= H_i(\gamma_{js}, \nabla_l T, \xi^v), \\ D\xi^\alpha/Dt &= \varphi^\alpha(\gamma_{js}, \nabla_l T, \xi^v). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выражения (2.11) не являются наиболее общей формой представления неизвестных функций. Возможной причиной изменения значения внутренних параметров в заданной точке является диффузия внутренних параметров, т. е. диффузия структурных элементов с различными значениями внутренних параметров при пространственно неоднородном распределении их значений. При этом диффузионный поток параметра ξ^α пропорционален в первом приближении производным от всех переменных по координате, и потому изменение внутреннего параметра в заданной точке определяется величинами $\partial^2 \xi^\alpha / \partial x_k \partial x_l$, которые должны входить в неизвестные функции (2.11). Далее, однако, мы не будем рассматривать такую возможность.

Соотношения (2.5) и (2.11) определяют неизвестные величины в системе уравнений движения (1.1), (1.3), (1.6), (1.10). Полученная система уравнений определяет в общем виде нелинейную вязкоупругую жидкость с точностью до некоторых неопределенных функций, вид которых невозможно установить без дальнейших предположений.

§ 3. Простейшие вязкоупругие жидкости

Система уравнений движения нелинейной вязкоупругой жидкости в наиболее общем виде была сформулирована в предыдущих параграфах. Чтобы продвинуться несколько дальше, оставаясь на физиономологической точке зрения, необходимо высказать некоторые предположения о числе и тензорной размерности внутренних параметров. Для простоты далее рассматриваем изотермические движения. В этом случае система (2.11) принимает вид

$$\sigma_{ik} + p\delta_{ik} = f_{ik}(\gamma_{js}, \xi^v), \quad D\xi^\alpha/Dt = \varphi^\alpha(\gamma_{js}, \xi^v). \quad (3.1)$$

Отметим прежде всего, что при сравнительно малых градиентах скорости внутренние релаксационные процес-

сы успевают следовать за изменением состояния системы. Иными словами, все времена релаксации системы оказываются малыми по сравнению с характерными временами движения системы и релаксационные процессы несущественны при рассмотрении движения системы. В этом случае с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости определяющее уравнение имеет хорошо известный [1] вид

$$\sigma_{ik} + p\delta_{ik} = 2\eta\dot{\gamma}_{ik} + \zeta\gamma_{jj}\delta_{ik}, \quad (3.2)$$

где птиром здесь и далее в этом параграфе обозначен девиатор тензора второго ранга, образуемый по правилу

$$b'_{ik} = b_{ik} - b_{jj}\delta_{ik}/3.$$

В уравнение (3.2) входят два положительных коэффициента: η — сдвиговая вязкость и ζ — объемная вязкость.

Линейная зависимость тензора напряжений от тензора градиентов скорости носит название закона Пьютона, а жидкости, для которых выполняется указанный зависимость, называются пьютоновскими жидкостями. Линейное приближение во многих случаях хорошо описывает наблюдаемые течения вязкой жидкости, однако есть и отклонения, которые заставили обратиться к нелинейным определяющим уравнениям. Отметим, что при течении нелинейные вязкие системы всегда остаются изотропными.

Рассмотрим теперь движение системы, времена релаксации которой сравнимы с характеристическими периодами движения. При этом внутренние процессы не успевают следовать за вспышками изменениями и для локального описания состояния системы необходимы некоторые внутренние параметры, число и тензорная размерность которых заранее не известны.

Из всех возможностей, несомненно, простейшим является рассмотренный Л. И. Мандельштамом и М. А. Лентовичем [8] (см. также [1], § 78) случай, когда в системе возможен один или несколько релаксационных процессов, описываемых скалярными переменными. Рассматривая случай с одним внутренним параметром, уравнения (3.1) в линейном по переменным приближении записываем

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} + p\delta_{ik} &= 2\eta_0\dot{\gamma}_{ik} + \zeta_0\gamma_{jj}\delta_{ik} + (z/\chi)\xi\delta_{ik}, \\ d\xi/dt &= \chi\gamma_{jj} - \xi/\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Определяя из последнего уравнения ξ и подставляя в предшествующую, получаем определяющее уравнение

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta_0\dot{\gamma}_{ik} + \left[\zeta_0\gamma_{jj} + z \int_0^\infty e^{-s/\tau} \gamma_{jj}(t-s) ds \right] \delta_{ik}. \quad (3.4)$$

Градиенты скорости под интегралом должны вычисляться в точке, где находится «частица» жидкости в момент времени $t - s$, т. е. интеграл следует вычислять по траектории движения «частицы». В случае, если градиенты скорости не зависят от координат, интегрирование следует понимать, как интегрирование по времени.

Соотношения (3.3) и (3.4) легко могут быть обобщены на случай произвольного числа внутренних переменных.

Из соотношения (3.4) видно, что релаксационные процессы скалярного типа не влияют на сдвиговые движения жидкости, которая при деформировании остается изотропной. «Скалярные» релаксационные процессы приводят к изменению и дисперсии объемной вязкости системы.

В отличие от этого первоначально изотропной системы, содержащей внутренний параметр, который является вектором или тензором более высокого ранга, при течении становится анизотропной. Одним из простейших примеров является случай, когда в системе происходит релаксационный процесс, который описывается внутренним параметром — симметричным тензором второго ранга ξ_{ik} , случай, который для изотропной жидкости в линейном приближении был рассмотрен Б. И. Филкельштейном и Н. С. Фастовым [9], а в общем виде — Хэндом [10].

Система уравнений (3.1), линеаризированная по градиенту скорости, имеет в этом случае вид (предполагается, что жидкость несжимаема)

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= (\sigma_0 + \sigma_1\xi_{lj}\gamma_{jl} + \sigma_2\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \delta_{ik} + (\sigma_3 + \sigma_4\xi_{lj}\gamma_{jl} + \\ &\quad + \sigma_5\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \xi_{ik} + (\sigma_6 + \sigma_7\xi_{lj}\gamma_{jl} + \sigma_8\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \xi_{ip}\xi_{pk} + \\ &\quad + \sigma_9\gamma_{ik} + \sigma_{10}(\xi_{ij}\gamma_{jk} + \xi_{kj}\gamma_{ji}) + \sigma_{11}(\xi_{ij}\xi_{js}\gamma_{sk} + \xi_{kj}\xi_{js}\gamma_{si}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\xi_{ik}/Dt &= (\kappa_0 + \kappa_1\xi_{lj}\gamma_{jl} + \kappa_2\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \delta_{ik} + \\ &\quad + (\kappa_3 + \kappa_4\xi_{lj}\gamma_{jl} + \kappa_5\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \xi_{ik} + (\kappa_6 + \kappa_7\xi_{lj}\gamma_{jl} + \\ &\quad + \kappa_8\xi_{lj}\xi_{js}\gamma_{sl}) \xi_{ip}\xi_{pk} + \kappa_9\gamma_{ik} + \kappa_{10}(\xi_{ij}\gamma_{jk} + \xi_{kj}\gamma_{ji}) + \\ &\quad + \kappa_{11}(\xi_{ij}\xi_{js}\gamma_{sk} + \xi_{kj}\xi_{js}\gamma_{si}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Феноменологические коэффициенты σ_α и χ_α являются функциями инвариантов тензора ξ_{ij} .

Система уравнений (3.5) является общим видом системы определяющих уравнений для анизотропных систем и применима, например, к жидким кристаллам. В случае, если равновесное состояние системы изотропно, то система уравнений (3.1) в линейном по градиентам скорости приближении имеет вид

$$\sigma_{ik} + p\delta_{ik} = 2\eta_0\gamma'_{ik} + \zeta_0\gamma_{jj}\delta_{ik} + \frac{z}{\chi_1}\xi_{jj}\delta_{ik} + \frac{h}{\chi_2}\xi'_{ik}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d\xi_{jj}}{dt} = \chi_1\gamma_{jj} - \frac{1}{\tau}\xi_{jj}, \quad \frac{d\xi'_{ik}}{dt} = 2\chi_2\gamma'_{ik} - \frac{1}{\tau}\xi'_{ik}. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) показывают, что если в системе происходит релаксационный процесс, описываемый внутренним параметром — тензором второго ранга, то система характеризуется, вообще говоря, двумя временами релаксации τ и τ' , определяющими скорость приближения системы к равновесию.

Внутренние параметры могут быть исключены из уравнений (3.6), (3.7). Действительно, в случае, когда внутренний параметр не зависит от координат, из (3.7) находим

$$\xi_{jj} = \chi_1 \int_0^\infty e^{-s/\tau} \gamma_{jj}(t-s) ds, \quad \xi'_{ik} = 2\chi_2 \int_0^\infty e^{-s/\tau'} \gamma'_{ik}(t-s) ds$$

и, подставляя последние выражения в (3.6), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma'_{ik} + 2h \int_0^\infty e^{-s/\tau'} \gamma'_{ik}(t-s) ds + \\ & + \left[\zeta_0\gamma_{jj} + z \int_0^\infty e^{-s/\tau} \gamma_{jj}(t-s) ds \right] \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Последнее уравнение есть линейное определяющее уравнение системы с одним тензорным внутренним параметром. Из уравнения следует, что релаксационные уравнения «тензорного» типа приводят к изменению и дисперсии сдвиговой и объемной вязкости системы.

Отметим, что внутренний параметр может быть исключен из уравнений (3.6), (3.7) иным образом. Рассмотрим несжимаемую систему, для которой всегда $\gamma_{jj} = 0$, поэтому в силу первого из уравнений (3.7) $\xi_{jj} = 0$. Тогда из (3.6)

и (3.7) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{ik} + p\delta_{ik}) + \frac{1}{\tau}(\sigma_{ik} + p\delta_{ik}) = 2\eta_0 \frac{d\gamma_{ik}}{dt} + \\ + 2\left(h + \frac{\eta_0}{\tau}\right)\gamma_{ik}. \end{aligned}$$

При $\eta_0 = 0$ из последнего выражения находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{ik} + p\delta_{ik}) = 2h\gamma_{ik} - \frac{1}{\tau}(\sigma_{ik} + p\delta_{ik}), \quad (3.9)$$

которое впервые было получено Максвеллом (см. [11, § 36]).

Очевидно, что, кроме двух приведенных примеров, возможны и множество других, отличающихся выбором числа и тензорной размерности ξ^α . Рассмотренные простые примеры показывают способ, которым определяющие уравнения могут быть получены при любом заданном числе и виде внутренних параметров.

Однако трудность заключается в том, что заранее не известно, сколько и какие внутренние параметры содержит система. Последнее обычно выясняется при рассмотрении некоторых простых модельных систем, одной из которых является разбавленная суспензия несферических частиц, рассматриваемая далее.

Глава 2

ЧАСТИЦА В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Кинематика частицы

Суспензия является системой, состоящей из больших частиц, находящихся в окружении малых. Существенным обстоятельством является то, что размеры большой частицы велики по сравнению с межатомными расстояниями. Это позволяет описывать движение жидкости, окружающей частицу, феноменологически, т. е. уравнениями движения вязкой жидкости, и рассматривать вопрос о возмущении потока жидкости находящейся там частицей и движение частицы в потоке жидкости с заданным невозмущенным распределением скорости $v(x, t)$.

Поскольку числа Рейнольдса, связанные с частицей, можно считать малыми, то движение жидкости около частицы описывается [1, 12, 13] уравнениями

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \rho \partial v_i / \partial t = -\nabla_i p + \eta \Delta v_i, \quad (1.1)$$

где η — коэффициент вязкости жидкости.

Границные условия определяются тем, что на поверхности частицы жидкость движется вместе с частицей, а на больших расстояниях от частицы в случае разбавленных суспензий скорость асимптотически приближается к заданному невозмущенному полю скоростей. В случае концентрированных суспензий последнее условие должно быть иным.

Следует иметь в виду, что распределение скоростей, определяемое уравнением (1.1), верно только в области около частицы и не верно на больших расстояниях от частицы, где нужно использовать более точное уравнение [1]. Однако сила, действующая на частицу, определяется распределением скорости непосредственно вблизи частицы, и потому в этом случае правильный результат получается с помощью решения уравнений (1.1).

Границные условия на разделе фаз связаны с движением частицы, ее кинематикой, что рассмотрим подробнее.

Положение частицы в пространстве определяется координатой некоторой точки внутри тела r . Этой точкой может быть координата центра масс частицы. Скорость движения частицы и определяется как скорость движения выбранной представительной точки.

Ориентацию частицы произвольной формы можно описывать косинусами углов между единичными векторами, жестко связанными с частицей, и осями лабораторной системы координат, которые образуют матрицу a_{ik} , где a_{ik} — косинус угла между i -й осью неподвижной системы и k -й осью вращающейся системы, причем

$$a_{ik}a_{lk} = \delta_{ik}, \quad a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}. \quad (1.2)$$

В силу указанных соотношений только три перемещения являются независимыми. Для описания ориентации частицы произвольной формы можно использовать два единичных вектора, например, e и e' , компоненты которых связаны тремя соотношениями, например, $e^2 = 1$, $e \cdot e' = 0$, $e'^2 = 1$.

Для описания ориентации частицы с осью симметрии достаточно одного единичного вектора, например, вектора e , направленного вдоль оси симметрии частицы.

Частица в потоке не только движется поступательно, но и вращается со скоростью $\Omega_i = -e_{ijs}\Omega_{js}/2$.

Таким образом, положение и движение произвольной частицы описываются пятью величинами: r , u , e , e' , Ω . При этом поступательная скорость частицы зависит от выбора представительной точки. Если вместо r' выбираем r , то скорость вместо u' определяется формулой

$$u_i = u'_i + \Omega_{ij}(r_j - r'_j). \quad (1.3)$$

Обычно представительную точку выбирают в центре симметрии частицы.

Далее более подробно рассмотрим движение частицы в потоке вязкой жидкости с заданной макроскопической средней скоростью $v(x, t)$. Такое рассмотрение удобно проводить во вращающейся системе координат, в которой частица неподвижна. Все величины во вращающейся системе координат будем снабжать штрихами. Переход от координат точки в лабораторной системе x к координатам точки во вращающейся системе координат и наоборот

осуществляется следующим образом:

$$x_i = a_{ik}x_k + r_i, \quad x'_k = a_{jk}(x_j - r_j), \quad (1.4)$$

где a_{ik} и r_k — зависящие от времени величины.

Дифференцируя (1.4) по времени и учитывая, что линейная скорость точки, неподвижной во вращающейся системе координат, выражается соотношением

$$u_i = \Omega_{ij}x_j, \quad (1.5)$$

находим закон преобразования для скорости

$$v_i = a_{ik}v'_k + \Omega_{ij}x_j + u_i, \quad v'_k = a_{jk}(v_j - u_j) - \Omega_{kj}x'_j.$$

Из последних соотношений после дифференцирования по координатам следует закон преобразования тензора градиентов скорости

$$v_{ik} = a_{il}a_{lk}v'_{lj} + \Omega_{ik}, \quad v'_{ik} = a_{ji}a_{lk}(v_{jl} - \Omega_{jl}).$$

Симметризованный и антисимметризованный тензоры градиентов скорости преобразуются следующим образом:

$$v'_{ik} = a_{ji}a_{lk}v_{jl}, \quad \omega'_{ik} = a_{ji}a_{lk}(v_{jl} - \Omega_{jl}). \quad (1.6)$$

Распределение скорости и давления, определяемое уравнениями (1.4), зависит от формы частицы и от невозмущенного потока, в котором находится частица. Однако лишь для немногих примеров найдены точные аналитические решения. Сводка результатов для потока с задачей не зависящей от координат скоростью движения жидкости представлена в [13]. Для потоков с постоянным градиентом скорости известны решения для возмущения скорости, вносимые паром [14] (см. также [1], § 22), эллипсоидом [15], слегка деформированной сферой [16] и длинным, тонким телом [17]. В следующем параграфе рассмотрим решение [15] для эллипсоидальной частицы в потоке с постоянными градиентами скорости.

§ 2. Возмущение потока эллипсоидальной частицей

Пусть невозмущенное частицей течение жидкости описывается давлением p_0 и полем скорости $v_{ik}x_k$, где v_{ik} — заданный на бесконечности и не зависящий от координат тензор градиентов скорости. Задача заключается в том,

чтобы найти изменение скорости и давления, вызванное присутствием частицы эллипсоидальной формы, уравнение поверхности которой в системе координат с началом в центре частицы имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

В дальнейшем будет удобно также для полуосей эллипса использовать обозначения $a_1 \equiv a$, $a_2 \equiv b$, $a_3 \equiv c$.

Решение задачи о возмущении течения жидкости частицей удобно искать в системе координат, связанной с частицей и вращающейся с угловой скоростью $\Omega_i = -e_{jjs}\Omega_{js}/2$.

Во вращающейся системе координат с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости система уравнений движения (1.1) приобретает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \eta_0 \Delta v_i = \nabla_i p, \quad (2.1)$$

причем $\mathbf{v} = 0$ на поверхности частицы;

$$v_i = v_{ik}x_k \quad \text{при } x_k \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

В этом случае определенное в [15] решение уравнений (2.1) имеет вид

$$v_i = v_{ik}x_k + \frac{\partial}{\partial x_i}(T_j \chi_j) + B_{ik}e_{kjs} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} + \\ + x_j A_{jl} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_l} - A_{il} \frac{\partial \Omega}{\partial x_l}, \quad (2.3)$$

$$p = p_0 + 2\eta_0 A_{il} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_l}, \quad (2.4)$$

где Ω и χ_j — эллипсоидальные гармонические функции, которые имеют вид

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} - 1 \right) \frac{d\xi}{Q},$$

$$\chi_1 = \alpha' yz, \quad \chi_2 = \beta' zx, \quad \chi_3 = \gamma' xy. \quad (2.5)$$

Эти функции зависят от эллипсоидальной координаты ξ , которая является положительным корнем уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1.$$

В выражениях (2.5) и далее используются обозначения Джейффри для интегралов

$$\begin{aligned} \alpha \equiv \alpha_1 &= \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) Q}, \quad \alpha' \equiv \alpha'_1 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)(c^2 + \xi) Q}, \\ \alpha'' \equiv \alpha''_1 &= \int_{\xi}^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(b_2 + \xi)(c^2 + \xi) Q}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

в которых $Q = \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}$. Интегралы, обозначенные символами $\beta \equiv \alpha_2$, $\gamma \equiv \alpha_3$, $\beta' \equiv \alpha'_2$, $\gamma' \equiv \alpha'_3$, $\beta'' \equiv \alpha''_2$, $\gamma'' \equiv \alpha''_3$, определяются подобным образом при замене полуосей эллипсоида в выражениях (2.6). При обозначении интегралов, в которых нижний предел равен нулю, в индексе ставим нуль, например, α_0 , β_0 , α'_{20} и т. д.

Поскольку все производные от эллипсоидальных гармонических функций исчезают на больших расстояниях от частицы, то функции (2.3) и (2.4) удовлетворяют граничным условиям на бесконечности. Остается потребовать выполнения граничных условий на поверхности эллипсоида.

Условие равенства нулю выражения (2.3) при $\xi = 0$ приводит к системе уравнений для неизвестных коэффициентов, из которых можно найти

$$T_i = -a'_{i0} e_{ijs} \gamma_{js}, \quad B_{ik} = 2(a_i^2 A_{ii} - a_k^2 A_{kk}). \quad (2.7)$$

Диагональные компоненты матрицы A_{ik} имеют вид

$$A_{ii} = (3a''_{i0} \gamma'_{ii} - \sum_k a''_{k0} \gamma'_{kk}) / 6(\beta''_0 \gamma_0 + \gamma''_0 a_0 + a''_0 \beta''_0), \quad (2.8)$$

а недиагональные компоненты —

$$\begin{aligned} A_{ik} = & \frac{a_{i0}(a_k^2 - a_i^2)\gamma'_{ik}}{2(a_{i0} - a_{k0})(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})} + \\ & + \frac{a_k^2 \omega_{ik}}{2(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Все описание в этом параграфе выполнено в системе координат, связанной с частицей, и чтобы отметить это обстоятельство, градиенты скорости в (2.8) и (2.9) снабжены штрихами. При переходе в лабораторную систему

координат по формулам (2.6) находим вместо (2.8) и (2.9)

$$A_{ii} = \frac{3a'_{i0} a_{ji} a_{li} \gamma_{ii} - \sum_k a''_{k0} a_{jk} a_{lk} \gamma_{jl}}{6(\beta''_0 \gamma_0 + \gamma''_0 a_0 + a''_0 \beta_0)}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} A_{ik} = & \frac{a_{i0}(a_k^2 - a_i^2) a_{ji} a_{lk} \gamma_{jl}}{2(a_{i0} - a_{k0})(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})} + \\ & + \frac{a_k^2 a_{ji} a_{lk} (\omega_{jl} - \Omega_{jl})}{2(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Последнее выражение определяется не только заданными в лабораторной системе координат градиентами скорости γ_{ik} и ω_{ik} , но и скоростью вращения частицы Ω_{ik} — независимым параметром, который может быть связан со сторонними моментами сил.

Отметим, что если эллипсоид вырождается в шар, то $a_{i0} = 2/3a^3$, $a'_{i0} = 2/5a^5$, $a''_{i0} = 4/15a^3$, и тогда матрица A_{ik} становится тепзором:

$$A_{ik} = \frac{5}{8} a^3 \gamma_{ik} + \frac{3}{8} a^3 (\omega_{ik} - \Omega_{ik}).$$

§ 3. Динамика частицы

Одним из центральных вопросов теории движения супензий является вопрос о поведении частицы в потоке жидкости с заданным распределением скорости под действием силы F_i и момента сил $L_j = -e_{jls} L_{ls}/2$. При этом со стороны жидкости на частицу действуют сила и момент сил, которые возникают при движении жидкости и которые могут быть вычислены по известному распределению скорости около частицы по формулам [1, 12, 13]

$$G_i = \oint P_i df, \quad T_{ik} = \oint (P_i x_k - P_k x_i) df, \quad (3.1)$$

где df — элемент поверхности частицы; $P_i = \sigma_{ik} n_k$ — сила, действующая на единицу поверхности частицы; n_k — нормаль к поверхности частицы, а тензор напряжений для рассматриваемой вязкой несжимаемой жидкости определяется выражением

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta_0 (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i).$$

При медленном безынерционном движении частицы и жидкости сторонние сила и момент сил уравновешиваются силой и моментом сил, действующими на частицу со стороны жидкости:

$$F_i + G_i = 0, \quad L_{js} + T_{js} = 0. \quad (3.2)$$

Эти условия определяют поступательную скорость и скорость вращения частицы.

Вопрос о движении частицы в потоке изучался для частиц различной формы при различных граничных условиях. Обзор результатов представлен в работах [13, 18].

Рассмотрим здесь выражения для поступательной скорости и скорости вращения частицы, которые могут быть установлены в общем виде с точностью до некоторых постоянных, число которых определяется симметрией частицы. Как и раньше, предполагаем, что число Рейнольдса, связанное с размерами частицы, мало и движение жидкости описывается линейными уравнениями (1.1).

В общем случае поступательная скорость и скорость вращения частицы являются функциями приложенных сил и моментов, а также функциями невозмущенной скорости жидкости и ее производных по координатам. Рассмотрим вначале вопрос о движении одной частицы в безграничной неподвижной вязкой жидкости под действием силы \mathbf{F} и момента сил \mathbf{L} .

В силу линейности уравнений (1.1) можно записать линейные соотношения, справедливые для частиц произвольной формы:

$$u_j = {}^t M_{jk} F_k + {}^c M_{kj} L_k, \quad (3.3)$$

$$\Omega_j = {}^c M_{jk} F_k + {}^r M_{jk} L_k. \quad (3.4)$$

Каждая из компонент тензоров ${}^a M_{jk}$ ($a \equiv t, c, r$) является некоторым оператором при учете инерционности движения жидкости, что, однако, не будем принимать во внимание. Будем считать коэффициенты ${}^a M_{jk}$, которые являются тензорами подвижности, постоянными. Поскольку линейные скорости частицы в точках \mathbf{r} и \mathbf{r}' внутри частицы связаны соотношением (1.3), то тензоры подвижности в (3.3) зависят от выбора точки, которая представляет положение и поступательную скорость частицы. Бренер показал [13, 18], что, воспользовавшись этой неопределенностью, можно выбрать в качестве предста-

вительной такую точку — центр сопротивления частицы, что тензор ${}^c M_{jk}$ станет симметричным. Тензоры ${}^t M_{jk}$ и ${}^r M_{jk}$ также являются симметричными.

Число независимых компонент тензоров подвижности определяется симметрией частицы. Тензоры подвижности частицы произвольной формы могут быть представлены в виде функции двух единичных векторов

$${}^a M_{jk} = {}^a M_1 \delta_{jk} + {}^a M_2 e_j e_k + {}^a M_3 c_j c_k + {}^a M_4 (e_j c_k + e_k c_j). \quad (3.5)$$

Тензоры подвижности осесимметричной частицы являются функцией одного единичного вектора и имеют вид

$${}^t M_{jk} = {}^t M_1 \delta_{jk} + {}^t M_2 e_j e_k, \quad {}^c M_{jk} = 0, \quad (3.6)$$

$${}^r M_{jk} = {}^r M_1 \delta_{jk} + {}^r M_2 e_j e_k.$$

Материальные постоянные в (3.5) и (3.6) определяются размерами и формой частицы, однако эта зависимость не может быть установлена из общих соображений, а только после вычисления возмущения потока находящейся там частицей, как это было впервые выполнено Стоксом для сферической частицы, а затем другими авторами для частиц другой формы [13]. Для сферической частицы радиусом a имеем

$${}^t M_1 = (6\pi\eta_0 a)^{-1}, \quad {}^r M_1 = (8\pi\eta_0 a^3)^{-1}, \quad {}^t M_2 = {}^r M_2 = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь движение частицы в потоке вязкой жидкости при отсутствии сторонних сил. В этом случае поступательная скорость и скорость вращения частицы являются функциями скорости и ее производных по координатам

$$u_j = u_j(v_i, \partial v_i / \partial x_k, \partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l, \dots),$$

$$\Omega_{jn} = \Omega_{jn}(\partial v_i / \partial x_k, \partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l, \dots). \quad (3.8)$$

Принимая, что при движении жидкости как целого частица движется со скоростью \mathbf{v} и при вращении жидкости как целого со скоростью $\boldsymbol{\omega}_{jk}$ частица вращается также со скоростью $\boldsymbol{\omega}_{jk}$, находим

$$u_j = v_j + f_j(\gamma_{ik}, \partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l, \dots),$$

$$\Omega_{jn} = \omega_{jn} + f_{jn}(\gamma_{ik}, \partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l, \dots). \quad (3.9)$$

Рассмотрим далее слабо неоднородные поля, ограничиваясь учетом производных скорости первого и второго порядков. В силу линейности уравнений движения жидкости записываем линейное по производным скорости выражение

$$u_j = v_j - A_{jik}\gamma_{ik} + A_{jisl}\partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l, \quad (3.10)$$

$$\Omega_{jn} = \omega_{jn} - B_{jnjk}\gamma_{ik} + B_{jnisl}\partial^2 v_i / \partial x_s \partial x_l. \quad (3.11)$$

Соотношения (3.10) и (3.11) справедливы для частиц любой формы. Число независимых компонент определяется симметрией частицы.

Рассмотрим далее осесимметричные частицы, ориентация которых определяется единичным вектором e , направленным вдоль оси симметрии частицы. Учитывая, что все тензоры симметричны по двум последним индексам, а тензоры в уравнении (3.11) антисимметричны по индексам j, n , записываем

$$A_{jik} = A^{\parallel}e_j e_i e_k + \frac{1}{2}A^{\perp}(\delta_{ji}e_k + \delta_{jk}e_i),$$

$$B_{jnsk} = \frac{1}{2}B(\delta_{ij}e_k e_s + \delta_{kj}e_i e_s - \delta_{is}e_k e_j - \delta_{ks}e_i e_j),$$

$$\begin{aligned} A_{jisn} = & A_1\delta_{ji}\delta_{is} + A_2\delta_{ji}e_i e_s + \frac{1}{2}A_3(\delta_{jl}e_i e_s + \delta_{js}e_i e_l) + \\ & + A_4\delta_{ls}e_j e_i + A_5e_j e_i e_l e_s + A_6(\delta_{jl}\delta_{is} + \delta_{js}\delta_{il}) + \\ & + A_7(\delta_{is}e_j e_l + \delta_{il}e_j e_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{jklis} = & (B_1\delta_{ls} + B_2e_i e_s)(e_j\delta_{ki} - e_k\delta_{ji}) + \\ & + \frac{1}{2}B_3[(e_l\delta_{ks} + e_s\delta_{kl})\delta_{ji} - (e_l\delta_{js} + e_s\delta_{jl})\delta_{ki}] + \\ & + \frac{1}{2}B_4[(e_e\delta_{ks} + e_s\delta_{kl})e_j e_i - (e_l\delta_{js} + e_s\delta_{jl})e_k e_i] + \\ & + B_5[e_j(\delta_{kl}\delta_{is} + \delta_{ks}\delta_{il}) - e_k(\delta_{jl}\delta_{is} + \delta_{js}\delta_{il})]. \end{aligned}$$

В случае частицы произвольной формы материальные тензоры в выражениях (3.10) и (3.11) следует представлять в виде функций двух единичных векторов.

Таким образом, выражение для поступательной скорости и скорости вращения осесимметричной частицы в слабо

неоднородном потоке имеет вид

$$\begin{aligned} u_j = & v_j - A^{\parallel}e_j e_i e_k \gamma_{ik} - A^{\perp}\gamma_{jk}^{ek}e_k + A_1 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_s^2} + \\ & + A_2 e_l e_s \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_l \partial x_s} + A_3 e_i e_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_s} + \\ & + A_4 e_j e_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_s^2} + A_5 e_j e_i e_l e_s \frac{\partial^2 v}{\partial x_l \partial x_s}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{jk} = & \omega_{jk} - B e_l (e_j \gamma_{kl} - e_k \gamma_{jl}) + B_1 (e_j \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_s^2} - e_k \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_s^2}) + \\ & + B_2 e_l e_s (e_j \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_s \partial x_l} - e_k \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_l \partial x_s}) + B_3 e_l (\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_l \partial x_k} - \\ & - \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial x_j}) + B_4 e_l e_i (e_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_k} - e_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_j}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

В силу несжимаемости жидкости члены с коэффициентами A_6, A_7 и B_5 исчезают.

В рассматриваемом приближении движение осесимметричной частицы определяется 12 феноменологическими постоянными. Если частица, кроме того, обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной оси симметрии, то для такой частицы $A^{\parallel} = A^{\perp} = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$, и движение частицы определяется теперь только плоскостью постоянными. Для сферической частицы исчезают все постоянные, кроме постоянной A_1 в формуле (3.12).

Материальные постоянные в (3.12) и (3.13) зависят от размеров и формы частицы, однако эта зависимость не может быть установлена из общих соображений, а только после определения возмущения неоднородного потока находящейся в нем частицей и вычисления действующих на частицу сил и моментов сил. Для некоторых частиц такие вычисления были выполнены и определены значения постоянных в формулах (3.12) и (3.13). Например, для сферической частицы радиусом a единственная постоянная имеет значение $A_1 = a^2/6$ и, следовательно, в этом случае

$$u_j = v_j + \frac{1}{6}a^2 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_s^2}, \quad \Omega_{jk} = \omega_{jk}. \quad (3.14)$$

Вернемся теперь к формуле (3.12). Все члены, кроме первого, описывают миграцию по отношению к линии тока. При этом члены с A^\perp , A_1 и A_2 описывают миграцию по направлению скорости, члены с A^\perp и A_3 — миграцию по направлению градиента скорости, члены с A^{\parallel} , A_4 и A_5 — миграцию по направлению вектора e . Отметим, что, согласно (3.14), сферическая частица мигрирует по направлению скорости в неоднородном поле скоростей. Миграция частиц изучалась теоретически и экспериментально [18].

Из выражения (3.13) можно найти линейную скорость движения конца единичного вектора

$$\begin{aligned} \frac{de_j}{dt} = & \omega_{jk}e_k - B(e_j e_l e_k \gamma_{lk} - e_l \gamma_{lj}) + \\ & + B_1 \left(e_j e_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_s^2} \right) + B_2 e_l e_s \left(e_j e_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_s \partial x_l} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_l \partial x_s} \right) + B_3 e_l e_k \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial x_j} \right) + \\ & + B_4 e_l e_i \left(e_j e_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Члены с коэффициентами B_1 , B_2 , B_3 , B_4 описывают миграцию единичного вектора в пространстве углов.

§ 4. Движение частицы эллипсоидальной формы

В качестве примера определим поступательную скорость и скорость вращения частицы эллипсоидальной формы, помещенной в поток вязкой жидкости с заданными постоянными градиентами скорости.

Прежде всего по формулам (3.1) найдем силу и момент сил, действующие на частицу в потоке. Распределение скорости для этого случая определяется выражением (2.3). Вычисляя производные скорости, находим силу, действующую на единицу площади поверхности эллипса:

$$\begin{aligned} P_i = & -p_0 s \frac{x_i}{a_i^2} + \frac{8\eta_0 S}{abc} A_{il} \frac{x_l}{a_l^2} - \\ & - 4\eta_0 S \left(\sum_{j=1}^3 a_{j0} A_{jj} \right) \frac{x_i}{a_i^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $s = (x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^{-1/2}$.

В рассматриваемом случае общая сила, действующая на частицу в жидкости, равна нулю, в чем можно убедиться интегрированием (4.1) по всей поверхности частицы. Это значит, что поступательная скорость центра симметрии частицы совпадает со скоростью невозмущенного потока в той точке, где находится центр симметрии.

Действующий на частицу момент сил вычисляем, учитывая, что

$$\frac{1}{\Omega} \oint x_i x_k s d\sigma = a_i^2 \delta_{ik}, \quad (4.2)$$

где $\Omega = 4\pi abc/3$ — объем частицы, и находим

$$T_{ik} = \frac{32}{3} \pi \eta_0 (A_{ik} - A_{ki}). \quad (4.3)$$

Это соотношение с помощью выражений (2.9) может быть записано в другой форме:

$$T'_{ik} = \frac{16}{3} \pi \eta_0 \frac{(a_k^2 + a_i^2) \omega'_{ik} + (a_k^2 - a_i^2) \gamma'_{ik}}{a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0}}. \quad (4.4)$$

Переходя в лабораторную систему координат с помощью формул $T_{ms} = a_{mi} a_{sk} T'_{ik}$ и (4.6), получаем

$$\begin{aligned} T_{ms} = & \frac{16}{3} \pi \eta_0 \left[a_{mi} a_{sk} \frac{a_k^2 + a_i^2}{a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0}} a_{ji} a_{lk} (\omega_{jl} - \Omega_{jl}) + \right. \\ & \left. + a_{mi} a_{sk} \frac{a_k^2 - a_i^2}{a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0}} a_{ji} a_{lk} \gamma_{jl} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В силу соотношений (1.2) не все из направляющих косинусов оказываются независимыми. Поэтому выражение (4.5), а также выражения такого типа можно преобразовать, вводя в общем случае два вектора e и c , которые описывают ориентацию частицы, определив $a_{i1} = e_i$; $a_{i2} = c_i$. Таким образом, можем записать $a_{i3} a_{k3} = \delta_{ik} = e_i e_k - c_i c_k$. Ограничимся далее рассмотрением более простого случая осесимметричной частицы, когда ориентация частицы определяется только вектором $e_i = a_{i1}$, причем $a_{i2} a_{k2} + a_{i3} a_{k3} = \delta_{ik} = e_i e_k$. В этом случае преобразование для некоторой матрицы Λ_{ik} имеет вид

$$\begin{aligned} a_{mi} a_{sk} \Lambda_{ik} a_{ji} a_{lk} = & e_m e_s e_j e_l (\Lambda_{11} - \Lambda_{21} - \Lambda_{12} + \Lambda_{22}) + \\ & + e_s e_l \delta_{mj} (\Lambda_{21} - \Lambda_{22}) + e_m e_j \delta_{sl} (\Lambda_{12} - \Lambda_{22}) + \delta_{sl} \delta_{mj} \Lambda_{22}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для эллипсоида вращения выражение для момента сил (4.5) по правилу (4.6) преобразуется к виду

$$T_{ms} = \frac{16}{3} \pi \eta_0 \left[\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 a_0 + b^2 \beta_0} - \frac{1}{\beta_0} \right) (e_s e_l \delta_{mj} + e_m e_j \delta_{sl}) (\omega_{jl} - \Omega_{jl}) + \frac{1}{\beta_0} (\omega_{ms} - \Omega_{ms}) + + \frac{a^2 - b^2}{a^2 a_0 + b^2 \beta_0} (e_s e_l \delta_{mj} - e_m e_j \delta_{sl}) \gamma_{il} \right]. \quad (4.7)$$

Определим теперь скорость вращения находящейся в потоке частицы из условия равенства плюс суммы моментов сил, действующих на частицу. При этом считаем инерционные моменты сил малыми и пренебрегаем ими.

Как уже указывалось, кроме рассматриваемого момента сил, определяемого выражениями (4.3) — (4.5), (4.7), на частицу может непосредственно действовать некоторый сторонний момент сил L_{ik} . Таким образом, условие баланса моментов сил (3.2) с помощью выражения (4.4) записывается следующим образом:

$$(a_k^2 - a_i^2) \dot{\gamma}_{ik} + (a_k^2 + a_i^2) \dot{\omega}_{ik} + \frac{3}{16\pi\eta_0} (a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0}) L_{ik} = 0. \quad (4.8)$$

Откуда, переходя к лабораторной системе координат, по формулам (1.6) находим скорость вращения частицы

$$\begin{aligned} \Omega_{lm} = & \omega_{lm} + \frac{a_k^2 - a_i^2}{a_k^2 + a_i^2} a_{li} a_{ji} a_{mk} a_{sk} \gamma_{js} + \\ & + \frac{3(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})}{16\pi\eta_0 (a_k^2 + a_i^2)} a_{li} a_{ji} a_{mk} a_{sk} L_{js}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Скорость вращения частицы определяется как градиентами скорости γ_{js} и ω_{js} , так и сторонним моментом сил.

Рассматривая частицу с осью симметрии и определяя, как раньше, $e_i = a_{ii}$, из выражения (4.9) по правилу (4.6) находим

$$\begin{aligned} \Omega_{lm} = & \lambda (e_m \gamma_{ls} - e_l \gamma_{ms}) e_s + \omega_{lm} + \\ & + \frac{3}{16\pi\eta_0} \left[\left(\frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} - \beta_0 \right) (e_m e_k \delta_{lj} + e_l e_j \delta_{mk}) L_{jk} + \beta_0 L_{lm} \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Величина $\lambda = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ изменяется от -1 до 1 , имея предельными случаями плоский диск и тонкую иглу. При $\lambda = 0$ частица вырождается в шарик.

Из выражения (4.10) можно найти линейную скорость движения конца единичного вектора

$$\begin{aligned} \frac{de_l}{dt} = & \omega_{lk} e_k + \lambda (\gamma_{ls} e_s - \gamma_{ks} e_k e_s e_l) + \\ & + \frac{3}{16\pi\eta_0} \frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} L_{lk} e_k. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Эта формула удобна для анализа движения частицы, из которого видно, что поток стремится ориентировать единичный вектор по направлению течения.

Рассматривая случай, когда $L_{lk} = 0$, переходя к системе сферических координат по формулам

$$e_1 = \cos\theta, e_2 = \sin\theta \cos\varphi, e_3 = \sin\theta \sin\varphi \quad (4.12)$$

и рассматривая простое сдвиговое течение ($v_{32} \neq 0$), из (4.11) находим выражения

$$\dot{\Theta} = \lambda v_{32} \sin\Theta \cos\Theta \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\dot{\Phi} = (1/2)v_{32}[(1 - \lambda)\sin^2\varphi + (1 + \lambda)\cos^2\varphi], \quad (4.13)$$

которые точно совпадают с выражениями, полученными в [15] для этого частного случая. Общее выражение (4.11) им не было указано.

Так как $\Omega_j = -e_{jlm} \Omega_{lm}/2$, $L_{jk} = -e_{jks} L_s$, то выражение (4.10) можно записать в другой форме, откуда следует, что эллипсоид вращения в неподвижной жидкости под действием внешнего момента сил L_s вращается со скоростью

$$\Omega_i = M_{ij} L_j, \quad (4.14)$$

где тензор подвижности имеет вид

$$M_{ij} = \frac{3}{16\pi\eta_0} \left[\frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} \delta_{ij} + \left(\beta_0 - \frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} \right) e_i e_j \right]. \quad (4.15)$$

В заключение отметим, что матрица A_{ik} , определяемая формулами (2.8) и (2.9), теперь, после определения скорости вращения частицы, может быть доопределена. Подставляя выражение для ω_{ik} , определяемого из (4.8), в

выражение (2.9), находим

$$A_{ik} = \frac{(a_k^2 - a_i^2) \gamma'_{ik}}{2(a_{i0} - a_{k0})(a_k^2 + a_i^2)} - \frac{3}{32\pi\eta_0} \frac{a_k^2}{a_k^2 + a_i^2} L'_{ik}. \quad (4.16)$$

Диагональные члены матрицы A_{ik} не изменяются и по-прежнему определяются выражением (2.8).

§ 5. Броуновское движение частиц

Малые суспендированные частицы принимают участие в тепловом движении и совершают беспорядочное поступательное и вращательное, так называемое броуновское движение, которое происходит под действием случайных сил и случайных моментов сил, которые должны быть учтены в общем балансе сил при определении движения частиц. Поэтому описание движения не очень больших частиц является проблемой статистической теории, начало которой положено работами А. Эйнштейна и М. Смолуховского по теории броуновского движения (см. [49]).

Наличие случайных составляющих сил и моментов сил приводит к случайным составляющим скорости поступательного и вращательного движений частиц. Например, для осесимметричных частиц, которые будем рассматривать далее, следует записать

$$\tilde{\Omega}_{jl} = \Omega_{jl}(\mathbf{e}, t) + \psi_{jl}(\mathbf{e}, t), \quad \tilde{\Omega}_k = \Omega_k(\mathbf{e}, t) + \psi_k(\mathbf{e}, t), \quad (5.1)$$

где $\Omega_{jl} = -e_{jlk}\Omega_k$ — регулярная составляющая скорости вращения частицы, определенная для осесимметричной частицы выражением (3.13), а для эллипсоида вращения формулой (4.10); $\psi_{jl} = -e_{jlk}\psi_k$ — случайная составляющая скорости вращения.

При этом, например, для эллипсоидальной частицы из (2.11) и (5.1) находим выражение для матрицы

$$A_{ik} = \frac{(a_k^2 - a_i^2) \gamma'_{ik}}{2(a_{i0} - a_{k0})(a_k^2 + a_i^2)} - \frac{a_k^2 \psi'_{ik}}{2(a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})}. \quad (5.2)$$

Отсюда по формуле (4.3) находим момент сил, действующих на частицу:

$$T'_{ik} = T'_{ik} - \frac{16\pi\eta_0}{3} \frac{a_i^2 + a_k^2}{a_i^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0}} \psi'_{ik},$$

который состоит из среднего момента сил, определенного формулой (4.4), и случайной добавки. При учете случайных составляющих в скорости вращения средний момент сил, действующий на частицы, не равен нулю.

Предполагаем, что случайные составляющие скорости являются гауссовыми случайными функциями, статистические свойства которых описываются корреляционным тензором

$$\langle \psi_k(\mathbf{e}, t) \psi_m(\mathbf{e}', t') \rangle = 2\delta(t - t') D_{km}^{(r)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}'). \quad (5.3)$$

Предполагаем также, что $\langle \psi_k(\mathbf{e}, t) \rangle = 0$.

Усреднение выполняется по ансамблю реализаций случайной силы.

Из выражения (5.1) следует уравнение для скорости изменения вектора ориентации, которое с добавлением сил реакции с неопределенным множителем L имеет вид

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = e_{jks}\Omega_k e_s - \frac{1}{2} L e_j + \phi_j, \quad (5.4)$$

где случайная составляющая ϕ_j имеет три независимые компоненты и только после определения неопределенного множителя имеет вид $\phi_j = e_{jks}\psi_k e_s$.

Аналогичным образом для поступательного движения можно записать

$$dr_j/dt = u_j(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t) + \chi_j(\mathbf{e}, t), \quad (5.5)$$

где u_j — неслучайная скорость частицы, определяемая для осесимметричной частицы в общем случае формулой (3.12). Случайные составляющие скорости χ_j в (5.5) также являются гауссовыми случайными функциями с тензором корреляции

$$\langle \chi_j(\mathbf{e}, t) \chi_l(\mathbf{e}', t') \rangle = 2\delta(t - t') D_{jl}^{(t)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}'). \quad (5.6)$$

При этом $\langle \chi_j(\mathbf{e}, t) \rangle = 0$. Случайные силы ϕ_j и χ_j не коррелируют между собой.

Задача определения стохастического движения частиц в пространстве и времени сводится к задаче об отыскании функции распределения вероятности положения и ориентации частицы $f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t)$, которую определяем следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t) = \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{e} - \mathbf{e}(t)) \delta(1 - \mathbf{e}^2(t)) \rangle \equiv \langle \Phi \rangle. \quad (5.7)$$

Функция распределения удовлетворяет некоторому уравнению³, для определения которого воспользуемся методом, изложенным в [20].

Продифференцируем функцию распределения (5. 7) по времени, после чего находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left\langle \frac{dr_j}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} \right\rangle - \left\langle \frac{de_j}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial e_j} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{de_j}{dt} e_j \Phi \right\rangle. \quad (5.8)$$

При этом учитываем, что

$$\frac{\partial}{\partial e_j} \delta(1 - e^2(t)) = -2e_j \delta(1 - e^2(t)). \quad (5.9)$$

С помощью соотношений (5. 4) и (5. 5) из (5. 8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial r_j} + \Omega_{jl} e_l \frac{\partial f}{\partial e_j} + L e^2 f + \\ + \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \chi_j \Phi \rangle + \frac{\partial}{\partial e_j} \langle \phi_j \Phi \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для определения средних значений $\langle \chi_j \Phi \rangle$ и $\langle \phi_j \Phi \rangle$ используем формулу Фуратцу — Новикова [20], которая может быть представлена в виде двух отдельных выражений, так как поступательная и вращательная случайные силы не коррелируют. Для поступательного движения с учетом выражения (5. 6) имеем

$$\langle \chi_j(\mathbf{e}, t) R[\phi, \chi] \rangle = \int D_{jl}^{(l)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') \left\langle \frac{\delta R}{\delta \chi_l(\mathbf{e}', t)} \right\rangle d\mathbf{r}' d\mathbf{e}', \quad (5.11)$$

где R — некоторый функционал случайных функций.

Для вращательного движения с учетом того, что в окончательном результате

$$\langle \phi_j(\mathbf{e}, t) \phi_l(\mathbf{e}', t') \rangle = 2\delta(t - t') e_{jks} e_{lmp} D_{km}^{(r)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') e_s e_p,$$

находим

$$\langle \phi_j(\mathbf{e}, t) R[\phi, \chi] \rangle = e_{jks} e_{mfp} \int D_{kl}^{(r)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') e_p e_s \left\langle \frac{\delta R}{\delta \phi_m(\mathbf{e}', t)} \right\rangle d\mathbf{r}' d\mathbf{e}'. \quad (5.12)$$

³ Обычно постулируют, что функция распределения удовлетворяет уравнению непрерывности, которое, например, для рассматриваемого случая имеет вид $\partial f / \partial t = \partial(u_j f) / \partial r_j + \partial(e_j f) / \partial e_j$. После определения диффузионных потоков уравнение непрерывности приводит к исходному уравнению.

Следуя способу, предложеному в работе [20], находим функциональные производные. Неравные пуль производные имеют вид

$$\delta r_i(t) / \delta \chi_j(\mathbf{e}, t) = \delta_{ij} \Phi, \quad \delta e_i(t) / \delta \phi_j(\mathbf{e}, t) = \delta_{ij} \Phi. \quad (5.13)$$

Теперь по формулам (5. 11) и (5. 12) находим

$$\begin{aligned} \langle \chi_j \Phi \rangle &= -D_{jl}^{(l)} \frac{\partial f}{\partial r_l}, \\ \langle \phi_j \Phi \rangle &= -e_{jks} e_{mfp} D_{kl}^{(r)} e_p e_s \frac{\partial f}{\partial e_m} \end{aligned} \quad (5.14)$$

и по формуле (5. 10) записываем уравнение диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial r_j} + \Omega_{jl} e_l \frac{\partial f}{\partial e_j} + L e^2 f = \\ = \frac{\partial}{\partial r_j} D_{jl}^{(l)} \frac{\partial f}{\partial r_l} + e_{jks} e_{mfp} \frac{\partial}{\partial e_p} D_{kl}^{(r)} e_p e_s \frac{\partial f}{\partial e_m}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Определим теперь неопределенный множитель из условия, что интеграл по всем координатам $\int f \delta(1 - e^2) d\mathbf{r} d\mathbf{e}$ равняется постоянной, которую далее будем полагать равной единице.

При усреднении уравнения (5. 15) возникает необходимость усреднять производные некоторой функции. При интегрировании по частям с учетом формулы (5. 9) устанавливается правило усреднения

$$\begin{aligned} \int B \frac{\partial F}{\partial e_j} \delta(1 - e^2) d\mathbf{e} &= 2 \int \mathbf{e}_j B F \delta(1 - e^2) d\mathbf{e} - \\ &- \int \frac{\partial B}{\partial e_j} F \delta(1 - e^2) d\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Умножим уравнение (5. 15) на $\delta(1 - e^2)$ и проинтегрируем по всем переменным. С учетом правила (5. 16) находим, что, для того чтобы уравнение (5. 15) при усреднении обращалось в тождество, необходимо

$$L = e_l \partial \Omega_{jl} / \partial e_j.$$

Таким образом, уравнение диффузии приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial r_j} + e_s \frac{\partial (\Omega_{js} f)}{\partial e_j} &= \frac{\partial}{\partial r_j} D_{jl}^{(l)} \frac{\partial f}{\partial r_l} + \\ + e_{jks} e_{mfp} \frac{\partial}{\partial e_p} D_{kl}^{(r)} e_p e_s \frac{\partial f}{\partial e_m}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Симметричные тензоры поступательной диффузии $D_{jl}^{(l)}$ и вращательной диффузии $D_{jl}^{(r)}$ для осесимметричной частицы могут быть представлены в общем виде

$$\begin{aligned} D_{jl}^{(l)} &= D^{\perp} \delta_{jl} + (D^{\parallel} - D^{\perp}) e_j e_l, \\ D_{km}^{(r)} &= D \delta_{km} + D^l e_k e_m. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Легко убедиться, следуя рассуждениям Эйнштейна (см. [1, § 59]), что тензоры диффузии связаны с определяемыми формулами (3. 3), (3. 4) и (3. 6) тензорами подвижности соотношениями

$$D_{ik}^{(l)} = T^l \cdot M_{ik}, \quad D_{ik}^{(r)} = T^r \cdot M_{ik}. \quad (5.19)$$

Эти формулы справедливы для осесимметричной частицы со специальным выбором представительной точки. В этом случае тензоры поступательной и вращательной диффузии разделяются. В общем случае возникает более сложная ситуация, которая подробно обсуждается в работах Бреинера [21].

Теперь уравнение диффузии с учетом соотношений (5. 18) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial r_j} + e_s \frac{\partial (\Omega_{js} f)}{\partial e_j} = \\ = [D^{\perp} \delta_{jl} + (D^{\parallel} - D^{\perp}) e_j e_l] \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_l} + \\ + D \left(e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial e_j^2} - e_s e_j \frac{\partial^2 f}{\partial e_s \partial e_j} - 2e_j \frac{\partial f}{\partial e_j} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где u_i и Ω_{js} для осесимметричной частицы определяются формулами (3. 12) и (3. 13).

Уравнение (5. 20) описывает совместную поступательную и вращательную диффузию частиц. При равномерном распределении частиц в пространстве, когда функция распределения не зависит от координат, уравнение диффузии (5. 20) приобретает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + e_s \frac{\partial (\Omega_{js} w)}{\partial e_j} = D \left(e^2 \frac{\partial^2 w}{\partial e_j^2} - e_s e_j \frac{\partial^2 w}{\partial e_s \partial e_j} - 2e_j \frac{\partial w}{\partial e_j} \right). \quad (5.21)$$

Полученное таким образом уравнение вращательной диффузии осесимметричной частицы с действующими на нее произвольными моментами использовалось автором

ранее [22]. В уравнении (5. 21) так же, как и в предыдущих уравнениях, компоненты вектора \mathbf{e} считаются независимыми, так как условие $\mathbf{e}^2 = 1$ учитывается автоматически.

Отметим, что для частицы произвольной формы, ориентация которой определяется двумя единичными векторами \mathbf{e} и \mathbf{s} , уравнение вращательной диффузии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + e_s \frac{\partial (\Omega_{js} w)}{\partial e_j} + c_s \frac{\partial (\Omega_{js} w)}{\partial c_j} = \\ = e_{jks} e_{lin} \left\{ \frac{\partial}{\partial e_j} \left[D_{ki} \left(e_s e_n \frac{\partial w}{\partial e_l} + e_s c_n \frac{\partial w}{\partial c_l} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial c_j} \left[D_{ki} \left(c_s c_n \frac{\partial w}{\partial e_l} + c_s e_n \frac{\partial w}{\partial e_l} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тензор вращательной диффузии D_{ki} является произвольной функцией векторов \mathbf{e} и \mathbf{s} .

Оператор $\mathbf{e}^2 \frac{\partial^2}{\partial e_j^2} - e_s e_j \frac{\partial^2}{\partial e_s \partial e_j} - 2e_j \frac{\partial}{\partial e_j}$ является угловой частью оператора Лапласа, записанной в декартовой системе координат. Обычно оператор Лапласа и уравнение вращательной диффузии формулируются в угловых переменных. Формулировка уравнения вращательной диффузии в декартовых координатах позволяет просто получить общие результаты.

В справедливости уравнения (5. 21) можно убедиться другим способом, если рассмотреть диффузию деформируемого вектора с анизотропной подвижностью. Если подвижность в радиальном направлении стремится к нулю, то уравнение диффузии приобретает вид (5. 21).

Теперь после определения неопределенного множителя формулу Фурутцу — Новикова для вращательных степеней свободы следует записать в илом виде. Так как теперь $\phi_j = e_{jks} \psi_k e_s$, то

$$\langle \phi_j(\mathbf{e}, t) R[\Phi, \chi] \rangle = e_{jks} \langle \psi_k e_s R \rangle,$$

и потому по формуле Фурутцу — Новикова

$$\langle \phi_j(\mathbf{e}, t) R[\Phi, \chi] \rangle =$$

$$= e_{jks} \int \langle \psi_k(\mathbf{e}, t) \psi_l(\mathbf{e}', t') \rangle \left\langle \frac{\delta(e_s R)}{\delta \psi_l(\mathbf{e}', t')} \right\rangle dt' dr' d\mathbf{e}'.$$

Заменяя переменную дифференцирования и учитывая формулы (5. 3), получаем вместо (5. 12) искомую формулу

$$\begin{aligned} \langle \phi_j(\mathbf{e}, t) R[\Phi, \chi] \rangle &= \\ = e_{jks} e_{mlp} \int D_{kl}^{(r)}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') e_p \left\langle \frac{\delta(e_s R)}{\delta \phi_m} \right\rangle d\mathbf{r}' d\mathbf{e}'. \end{aligned} \quad (5.22)$$

§ 6. Диффузия частиц в потоке

В статистическом смысле положение и ориентация осесимметричной броуновской частицы в движущейся жидкости определяются функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t)$, которая удовлетворяет уравнению (5. 20), описывающему одновременно поступательную и вращательную диффузию частиц.

При рассмотрении поступательной диффузии частиц следует ввести зависящую от времени и координат функцию распределения

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t) \delta(1 - \mathbf{e}^2) d\mathbf{e}, \quad (6.1)$$

уравнение для которой может быть получено из (5. 20) после усреднения по ориентациям частиц.

Функция распределения $n(\mathbf{r}, t)$ является моментом функции распределения шарового порядка. Подобным образом можно определить также зависящие от времени и координат моменты высших порядков, например, моменты первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} \langle e_i \rangle &= \frac{1}{n} \int e_i f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t) \delta(1 - \mathbf{e}^2) d\mathbf{e}, \\ \langle e_i e_k \rangle &= \frac{1}{n} \int e_i e_k f(\mathbf{r}, \mathbf{e}, t) \delta(1 - \mathbf{e}^2) d\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

которые описывают среднюю ориентацию частиц. Далее в этом параграфе будем опускать множитель n , подразумевая его существование.

При определении уравнения диффузии и уравнений для моментов возникает необходимость усреднить производные функции распределения. При этом следует

пользоваться правилами

$$\begin{aligned} \int B \delta(1 - \mathbf{e}^2) \frac{\partial f}{\partial e_j} d\mathbf{e} &= 2 \langle e_j B \rangle - \left\langle \frac{\partial B}{\partial e_j} \right\rangle, \\ \int B \delta(1 - \mathbf{e}^2) \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_s} d\mathbf{e} &= 4 \langle e_j e_s B \rangle - 2 \delta_{js} \langle B \rangle - \\ &- 2 \left\langle e_s \frac{\partial B}{\partial e_j} + e_j \frac{\partial B}{\partial e_s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 B}{\partial e_j \partial e_s} \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

которые легко устанавливаются при интегрировании по частям и с учетом того, что $\partial \delta(1 - \mathbf{e}^2)/\partial e_j = -2e_j \delta(1 - \mathbf{e}^2)$.

Усредним теперь уравнение (5. 20) по ориентациям, предполагая, что нет сторонних, зависящих от координат сил, после чего находим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial r_j} = D^\perp \frac{\partial^2 n}{\partial r_j^2} + (D^\parallel - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_j e_s \rangle}{\partial r_j \partial r_s}, \quad (6.4)$$

где u_j определяется формулой (3. 12) для частицы с осью симметрии, движущейся в слабо неоднородном потоке.

В уравнение диффузии (6. 4), кроме функции $n(\mathbf{r}, t)$, входят другие неизвестные величины — моменты функции распределения первого, второго, третьего и четвертого порядков. Уравнения для этих моментов также следуют из уравнения (5. 20). Умножая (5. 20) последовательно на e_k , $e_i e_k$ и т. д. и усредняя по правилу (6. 3), находим

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_k \rangle}{dt} + \frac{\partial \langle u_j e_k \rangle}{\partial r_j} - \langle \Omega_{ks} e_s \rangle &= -\frac{1}{\tau_1} \langle e_k \rangle + \\ + D^\perp \frac{\partial^2 \langle e_k \rangle}{\partial r_j^2} + (D^\parallel - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_k e_j e_s \rangle}{\partial r_j \partial r_s}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} + \frac{\partial \langle u_j e_i e_k \rangle}{\partial r_j} - \langle \Omega_{is} e_s e_k \rangle - \langle \Omega_{ks} e_s e_i \rangle &= \\ = -\frac{1}{\tau_2} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + D^\perp \frac{\partial^2 \langle e_i e_k \rangle}{\partial r_j^2} + \\ + (D^\parallel - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle}{\partial r_j \partial r_s}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k e_l \rangle}{dt} + \frac{\partial \langle u_j e_i e_k e_l \rangle}{\partial r_j} - \langle \Omega_{is} e_s e_k e_l \rangle - \langle \Omega_{ks} e_s e_i e_l \rangle - \\ - \langle \Omega_{ls} e_s e_k e_i \rangle &= -\frac{1}{\tau_3} \left[\langle e_i e_k e_l \rangle - \frac{1}{6} (\delta_{ik} \langle e_l \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$+ \delta_{il} \langle e_k \rangle + \delta_{kl} \langle e_i \rangle) \Big] + D^\perp \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_l \rangle}{\partial r_j^2} + \\ + (D^\parallel - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_j e_s e_l \rangle}{\partial r_j \partial r_s}, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d \langle e_i e_k e_l e_m \rangle}{dt} + \frac{\partial \langle u_j e_i e_k e_l e_m \rangle}{\partial r_j} - \langle \Omega_{is} e_s e_k e_l e_m \rangle - \\ & - \langle \Omega_{ks} e_s e_l e_l e_m \rangle - \langle \Omega_{ls} e_s e_i e_k e_m \rangle - \langle \Omega_{ms} e_s e_i e_k e_l \rangle = \\ & = -\frac{1}{\tau_4} \left[\langle e_i e_k e_l e_m \rangle - \frac{1}{10} (\delta_{ik} \langle e_l e_m \rangle + \delta_{il} \langle e_k e_m \rangle + \right. \\ & + \delta_{im} \langle e_k e_l \rangle + \delta_{kl} \langle e_i e_m \rangle + \delta_{km} \langle e_i e_l \rangle + \delta_{lm} \langle e_i e_k \rangle) \Big] + \\ & + D^\perp \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle}{\partial r_j^2} + (D^\parallel - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_l e_m e_j e_s \rangle}{\partial r_j \partial r_s}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В уравнениях (6.5) — (6.8) u_j и Ω_{js} определяются формулами (3.12) и (3.13) для рассматриваемых частиц с осью симметрии.

Подобным образом можно найти релаксационные уравнения для моментов высших порядков. В уравнения (6.5) — (6.8), а также в уравнения для моментов высших порядков входят времена релаксации, которые определяются формулой

$$\tau_\alpha = 1/\alpha(\alpha + 1)D. \quad (6.9)$$

Таким образом, диффузия осесимметричных частиц в заданном потоке вязкой жидкости описывается системой уравнений (6.4) — (6.8), которая оказывается не замкнутой, так как искомые моменты определяются через моменты более высоких порядков.

В уравнение поступательной диффузии (6.4) и релаксационные уравнения (6.5) — (6.8) входят коэффициенты поступательной диффузии D^\perp и D^\parallel и коэффициент вращательной диффузии D — постоянные, которые вводятся соотношениями (5.18), определяющими два тензора диффузии: $D_{ik}^{(t)}$ и $D_{ik}^{(r)}$. Последние формулами (5.19) связаны с тензорами подвижности частицы.

Обращаясь теперь к рассматриваемому примеру — эллипсоидальной частице, тензор вращательной подвижности которой определяется соотношением (4.15), по

формуле (5.19) находим

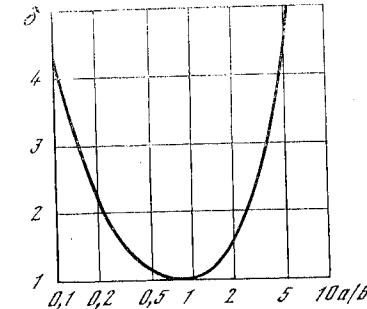
$$D_{ik}^{(r)} = \frac{3T}{16\pi\eta_0} \left[\frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} \delta_{ik} + \left(\beta_0 - \frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2} \right) e_i e_k \right]. \quad (6.10)$$

Хотя тензор вращательной диффузии является анизотропным, в уравнение диффузии входит только изотропная часть, точнее скалярный коэффициент вращательной диффузии

$$D = \frac{3T}{16\pi\eta_0} \frac{a^2 a_0 + b^2 \beta_0}{a^2 + b^2}. \quad (6.11)$$

Это выражение для коэффициента вращательной диффузии для эллипсоидов вращения было указано в [23].

Рис. 1. Зависимость форм-фактора коэффициента диффузии осесимметричного эллипсоида от отношения полуосей частицы



В определении (6.11) удобно выделить размерную часть, равную коэффициенту диффузии сферической частицы с объемом, равным объему эллипсоидальной частицы, и записать

$$D = \frac{T}{6\eta_0 \Omega} \frac{1}{\delta}, \quad (6.12)$$

где $\Omega = 4\pi ab^2/3$ — объем частицы; δ — безразмерная функция, зависящая только от формы частицы, т. е. от отношения a/b . Безразмерная функция введена так, что для шара $\delta = 1$. Значения δ , как функции a/b , изображены на рис. 1 и для некоторых значений отношения a/b приведены в табл. 1.

Рассмотрим в заключение диффузию осесимметричных частиц в неподвижной жидкости. Из системы уравнений

Таблица 1

Форм-фактор коэффициента диффузии и постоянные уравнения движения суспензии жестких эллипсоидов

a/b	λ	δ	ρ	α	β	ξ	χ
0,01	-0,9998	43,0	-2,47	86,4	-428	-471	212
0,015	-0,9996	28,6	-1,85	58,1	-85,9	-114	141
0,02	-0,9992	21,2	-0,504	43,9	-63,7	-85,7	107
0,03	-0,9982	14,2	-0,565	29,7	-42,4	-57,3	71,2
0,04	-0,9968	10,6	-0,567	22,7	-31,8	-43,2	53,5
0,05	-0,9950	8,52	-0,563	18,4	-25,4	-34,6	42,8
0,07	-0,9902	6,41	-0,555	13,6	-18,1	-24,8	30,5
0,1	-0,9802	4,31	-0,545	9,96	-12,7	-17,4	21,2
0,15	-0,9560	2,92	-0,528	7,14	-8,38	-11,6	13,8
0,2	-0,9231	2,24	-0,505	5,74	-6,21	-8,54	9,97
0,3	-0,8349	1,59	-0,465	4,35	-3,98	-5,32	5,85
0,4	-0,7244	1,29	-0,418	3,67	-2,80	-3,55	3,60
0,5	-0,6000	1,13	-0,363	3,27	-2,04	-2,41	2,18
0,7	-0,3423	1,00	-0,235	2,82	-1,03	-1,04	0,632
1,0	0,0000	1,00	0,00	2,50	0,00	0,00	0,00
1,5	0,3846	1,19	0,484	2,27	1,38	0,563	0,937
2	0,6000	1,50	1,06	2,17	2,71	0,660	2,83
3	0,8000	2,34	2,46	2,09	5,62	0,573	7,61
4	0,8824	3,40	4,13	2,05	8,99	0,455	13,1
5	0,9231	4,64	6,04	2,04	12,9	0,365	19,2
7	0,9600	7,65	10,5	2,02	22,0	0,247	33,0
10	0,9802	13,4	18,7	2,01	39,3	0,156	58,0
15	0,9912	25,9	36,1	2,00	76,9	0,088	110
20	0,9950	41,9	57,6	2,00	125	0,058	175
30	0,9978	83,7	113	2,00	250	0,031	341
40	0,9988	138	183	2,00	414	0,019	551
50	0,9992	205	268	2,00	614	0,014	807
70	0,9996	374	482	2,00	1123	0,008	1450
100	0,9998	721	946	2,00	2162	0,004	2752

(6.4) — (6.8) для этого случая следует система уравнений, из которых выписываем только два первых:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D^\perp \frac{\partial^2 n}{\partial r_j^2} + (D^{\parallel} - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_j e_s \rangle}{\partial r_j \partial r_s}, \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle e_i e_k \rangle}{\partial t} = & -6D \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + D^\perp \frac{\partial^2 \langle e_i e_k \rangle}{\partial r_j^2} + \\ & + (D^{\parallel} - D^\perp) \frac{\partial^2 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle}{\partial r_s \partial r_j}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Значения моментов функции распределения и концентрации частиц определяются совместной системой уравнений.

Сканируем уравнения (6.13) и (6.14), определяя уравнение для величины $S_{ik} = \langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}/3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ik}}{\partial t} = & -6DS_{ik} + D^\perp \frac{\partial^2 S_{ik}}{\partial r_j^2} + \\ & + (D^{\parallel} - D^\perp) \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_s} \left(\langle e_i e_k e_j e_s \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \langle e_j e_s \rangle \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Для типичных размеров частиц $a \approx 10^{-6}$ см отношение характерных времен выравнивания ориентации $1/6D$ и выравнивания концентраций L^2/D^\perp , где L — характерный макроскопический масштаб, мало:

$$D^\perp/L^2 \approx (a/L)^2 \ll 1, \quad (6.16)$$

и потому при рассмотрении уравнения (6.13), определяющего масштаб времени L^2/D^\perp , в уравнении (6.15) можно опустить два члена (производную по времени и вторую производную по координате с множителем D^\perp), которые имеют порядок величины (6.16).

Решение получившегося уравнения

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k \rangle = & \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{1}{6} \frac{D^{\parallel} - D^\perp}{D} \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_s} \times \\ & \times \left(\langle e_i e_k e_j e_s \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \langle e_j e_s \rangle \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

можно искать методом последовательных приближений в виде разложения по величине $(D^{\parallel} - D^\perp)/D$. Используя выражения для моментов в нулевом приближении, с точностью до членов первого порядка получаем указанную в [24] формулу, определяющую момент второго порядка через производные концентрации:

$$\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{1}{45} \frac{D^{\parallel} - D^\perp}{D} \frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r_i \partial r_k} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial^2 n}{\partial r_j^2} \right). \quad (6.18)$$

Отсюда следует, что уравнение (6.13) сводится к обычному уравнению диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{3} (2D^\perp + D^{\parallel}) \frac{\partial^2 n}{\partial r_j^2} \quad (6.19)$$

в случае, если различием между D^{\parallel} и D^\perp можно пренебречь. В противном случае уравнение диффузии становится более сложным и включает производные четвертого порядка.

В последующих главах пространственная диффузия частиц, как правило, не будет рассматриваться, иными словами, будем предполагать, что частицы распределены в пространстве равномерно.

Глава 3

ДИНАМИКА СУСПЕНЗИИ БЕЗ ПОЛЯ

§ 1. Напряжения в движущейся супензии

Присутствие частиц в движущейся жидкости приводит к тому, что течение становится более сложным и описывается некоторой микроскоростью \tilde{v} , которая из-за неупорядоченного движения частиц является случайной функцией координат и времени. Для описания движения супензии в целом нужно ввести некоторую среднюю скорость, которую, в согласии с обычным пониманием средней скорости в статистической физике [2, 25], следует определить в виде

$$v = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int_V \tilde{\rho} \tilde{v} dV,$$

где усреднение выполнено по объему, в котором находится достаточно много частиц. Здесь $\tilde{\rho}$ — микроплотность системы; M — масса элемента объема V . Именно указанная средняя скорость входит в макроскопические уравнения движения, которые обсуждались в первой главе.

Наличие жестких частиц в жидкости приводит к изменению локальных градиентов скорости по сравнению с асимптотически заданными градиентами скорости. При этом наблюдаемой величиной является градиент средней скорости dv_i/dx_j , который определяется, например, по скорости движения стенок прибора, где заключена испытуемая система. В силу тождества

$$\int \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \oint v_i n_j df$$

скорость движения граничной поверхности выражается через среднее значение градиента скорости. Отсюда следует, что наблюдаемый градиент скорости имеет смысл

среднего значения градиента микроскорости [26]

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{V} \int \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} dV. \quad (1.1)$$

Однако при фактическом усреднении распределения микроградиентов, вычисленных в стоксовом приближении, соотношение (1.1) не выполняется, поскольку на больших от частицы расстояниях приближение Стокса не верно, как уже указывалось в § 1 главы 2.

Наличие частиц в жидкости приводит также к дополнительной диссиляции энергии. При этом напряжения, вызывающие асимптотически одинаковое движение жидкости как без частицы, так и с ней, различны. Это и воспринимается как изменение эффективной вязкости системы при введении частиц. Задача заключается в том, чтобы вычислить напряжения, поддерживающие асимптотически заданное движение жидкости с частицей.

Усредненный тензор напряжений будем вычислять, следуя методу, предложенному в [1], через усредненное значение тензора потока импульса $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ в той области, где наблюдаемый тензор градиентов скорости постоянен. Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью v_i , с точностью до членов первого порядка по малой разности $\tilde{v}_i - v_i$ находим

$$\sigma_{ik} = \int \tilde{\sigma}_{ik} dV, \quad (1.2)$$

где $\tilde{\sigma}_{ik}$ — микроскопическое значение тензора напряжений; \tilde{v}_i — микроскопическое значение скорости. Общий случай обсуждается в [26, 27].

Тензор напряжений (1.2) удобно вычислять разбивая область интегрирования на две области: жидкость и твердое тело. Для рассматриваемых разбавленных суспензий выражение (1.2) переписываем в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{V} \int_{V-n\Omega} \sigma_{ik}^* dV + \frac{\Phi}{\Omega} \int \sigma_{ik}^T dV, \quad (1.3)$$

где Φ — объемная концентрация твердой фазы; Ω — объем одной частицы. Здесь сделано для простоты предположение, что все частицы одинаковы, вследствие чего последний член в (1.3) записан в виде произведения числа частиц $n = \Phi/\Omega$ на вклад в тензор напряжений от одной частицы.

Жидкость со взвешенными частицами, по предположению, является ньютоновской жидкостью, тензор напряжений которой имеет вид

$$\sigma_{ik}^* = -\tilde{p}\delta_{ik} + \eta_0 (\partial \tilde{v}_i / \partial x_k + \partial \tilde{v}_k / \partial x_i).$$

Было бы ошибкой находить первый член в (1.3) непосредственным усреднением по всему объему жидкости, так как распределение скоростей, определяемое в стоксовом приближении, на больших расстояниях от частицы не соответствует действительности. Поэтому первый член в (1.3) удобно преобразовать так, как это сделано в [26], с использованием очевидного соотношения

$$\frac{1}{V} \int_{V-n\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} dV = \frac{1}{V} \int \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} dV - \frac{1}{V} \sum \oint u_i n_k df,$$

где u_i — скорость частицы. В интересующих нас случаях последний член в указанном соотношении равен нулю.

Теперь с учетом формулы (1.1) находим выражение для первого члена (1.3):

$$-\delta_{ik} \frac{1}{V} \int \tilde{p} dV + 2\eta_0 \gamma_{ik}.$$

Второй член в (1.3) также удобно преобразовать от интеграла по объему к интегралу по поверхности, после чего находим

$$\int \sigma_{ik}^T dV = \oint \sigma_{ij}^T x_k n_j df.$$

Так как $\sigma_{ij}^T n_j = P_i$ есть сила, действующая на единицу поверхности частицы, то выражение для тензора средних напряжений будет

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta_0 v_{ik} + \frac{\Phi}{\Omega} \oint P_i x_k df. \quad (1.4)$$

Это выражение, указанное в [26], удобно для фактического вычисления средних напряжений, так как для этого необходимо знание плотности сил, действующих на частицу со стороны жидкости.

Изложенные выше соображения развивались в работах [28, 29], в которых при вычислении средних напряжений в суспензиях автор исходил из выражения, отличающегося от (1.4) вторым членом, определенным в виде

$2\eta_0(1 - \varphi)\gamma_{ik}$. Дело в том, что при вычислении средних градиентов скорости потока, где находится шарообразная частица, в стоксовом приближении действительно получается [29, 30]

$$\frac{1}{V} \int \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} dV = (1 - \varphi) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Однако в [26] указано, что справедливо соотношение (1. 1) и, как следствие этого, выражение (1. 4). Вследствие указанной ошибки вычисленные [32] значения тензора напряжений занижены на величину $2\eta_0\varphi\gamma_{ik}$, которую следует прибавить к соответствующим выражениям.

Выражение (1. 4) с учетом формул (2. 3. 1) и (2. 3. 2) может быть записано также в виде

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik} + \frac{1}{2}n(\Sigma_{ik} - L_{ik}^*), \quad (1.5)$$

где $\Sigma_{ik} = \oint (P_i x_k + P_k x_i) df$, L_{ik}^* — действующий на частицу момент сторонних (не гидродинамических) сил. Напомним, что силами инерции в этих рассуждениях пренебрегаем.

Симметричный тензор Σ_{ik} является линейной функцией γ_{ik} и L_{ik}^* и может быть представлен в общем виде. Для осесимметричной частицы, вводя феноменологические коэффициенты A_α , записываем⁴

$$\begin{aligned} \Sigma_{ik} = & A_1 e_i e_s \gamma_{js} \delta_{ik} + A_2 \gamma_{ik} + A_3 (e_i e_j \gamma_{jk} + e_k e_j \gamma_{ji}) + \\ & + A_4 e_i e_k e_j e_s \gamma_{js} + A_5 (e_i e_j L_{jk}^* + e_k e_j L_{ji}^*). \end{aligned}$$

Момент сил L_{js}^* является суммой моментов внешних сил и эффективного момента сил, связанного с броуновским движением, который для осесимметричной частицы имеет вид

$$L_{js}^* = T(e_j \partial \ln w / \partial e_s - e_s \partial \ln w / \partial e_j). \quad (1.6)$$

Зависящий от вектора e тензор напряжений (1. 5) должен быть усреднен по всем ориентациям с помощью

⁴ Можно показать, используя свойства симметрии [34], что из коэффициентов A_α только три являются независимыми.

функции распределения w . При усреднении можно выделить слагаемые с моментом эффективных броуновских сил (1. 6), которые после усреднения приобретают вид

$$\langle L_{js}^* \rangle = 0, \quad \langle \Sigma_{ik} \rangle = \dots + 2A_5 T (3 \langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}).$$

Окончательно после усреднения тензор напряжений записываем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik} + \frac{1}{2}n[A_1 \langle e_i e_s \rangle \gamma_{js} \delta_{ik} + \\ & + A_2 \gamma_{ik} + A_3 (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{jk} + \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \\ & + A_4 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js} + A_5 (\langle e_i e_j L_{jk} \rangle + \langle e_k e_j L_{ji} \rangle) + \\ & + 2A_5 T (3 \langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) - \langle L_{ik} \rangle], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где L_{ik} — момент внешних сил, действующий на частицу.

Отметим, что в соответствии с соотношением (1. 1. 18) из (1. 7) следует

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = -n \langle L_{ik} \rangle. \quad (1.8)$$

Несимметричность тензора напряжений связана только с моментом внешних сил. Выражение (1. 7) определяет общий вид тензора напряжений разбавленной супензии осесимметричных частиц произвольной формы.

§ 2. Тензор напряжений супензии эллипсоидов

Выражение для тензора напряжений (1. 7) применимо к супензиям осесимметричных частиц произвольной формы. Однако в конкретном случае вычисление коэффициентов A_α является непростой задачей и может быть выполнено для указанных ранее (см. § 1 главы 2) случаев, для которых известно распределение скорости около частицы.

Обращаясь теперь к рассматриваемому случаю супензии эллипсоидов, вспомним, что сила, действующая на поверхность эллипса со стороны жидкости, определяется выражением (2. 4. 1). По формуле (1. 4), учитывая (2. 4. 2), находим теперь тензор средних напряжений супензии эллипсоидов

$$\sigma'_{ik}(e) = -p\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik} + \frac{8\eta_0\Omega}{abc} A_{ik} - 4\eta_0\Omega\delta_{ik} \sum_{j=1}^3 a_{j0} A_{jj}. \quad (2.1)$$

Здесь еще не выполнено усреднение по ориентациям частиц, и потому выражение (2.4) относится к одной частице, помещенной в вязкую жидкость.

Выражение (2.4) записано в системе координат, связанной с частицей, что обозначено штрихом, и не имеет явно ковариантную форму.

Рассмотрим далее случай, когда на частицу не действуют внешние моменты сил, но оказывается существенным вращательное броуновское движение частицы. В этом случае скорость вращения частицы определяется соотношением (2.5.1), в котором присутствует случайная составляющая ψ_{ik} , вызванная случайными моментами сил. По формуле (2.2.9) находим значение недиагональных компонент матрицы A_{ik} :

$$A_{ik} = \frac{(a_k^2 - a_i^2) \gamma'_{ik}}{2(a_{i0} - a_{k0})(a_k^2 + a_i^2)} - \frac{a_k^2 \psi'_{ik}}{2(a_k^2 a_{i0} + a_k^2 a_{k0})}. \quad (2.2)$$

Выражение для диагональных компонент матрицы A_{ik} остается неизменным и по-прежнему выражается формулой (2.2.8).

Теперь может быть выполнен переход в лабораторную систему координат. Для эллипсоида произвольного вида эта операция громоздка, потому ограничимся рассмотрением эллипсоида вращения. При этом неслучайная часть матрицы A_{ik} приобретает вид

$$\begin{vmatrix} N\gamma'_{11} & L\gamma'_{12} & L\gamma'_{13} \\ L\gamma'_{12} & M\gamma'_{22} & M\gamma'_{23} \\ L\gamma'_{13} & M\gamma'_{23} & M\gamma'_{33} \end{vmatrix} = \delta_{ik} \frac{\sum a_{l0} \gamma'_{ll}}{12b^2 a'_0 \beta''_0},$$

где

$$N = \frac{a''_0}{4b^2 a'_0 \beta''_0}, \quad L = \frac{1}{2(a^2 + b^2) \beta'_0}, \quad M = \frac{1}{4b^2 a'_0}.$$

По (2.4.6) находим, что в лабораторной системе координат неслучайная составляющая матрицы имеет вид

$$\begin{aligned} a_{ji} a_{sh} A_{ik} = & - \frac{a''_0 - \beta''_0}{12b^2 a'_0 \beta''_0} e_n e_p \gamma_{np} \delta_{js} + M \gamma_{js} + (L - M) \times \\ & \times (e_j e_n \gamma_{ns} + e_s e_p \gamma_{jp}) + (N - 2L + M) e_j e_n e_s e_p \gamma_{pn}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналогичным образом находим

$$\Sigma a_{j0} A_{jj} = \frac{a_0 a''_0 - \beta_0 \beta''_0}{4b^2 a'_0 \beta''_0} e_n e_p \gamma_{np}. \quad (2.4)$$

Обратимся теперь к случайной составляющей матрицы A_{ik} , определяемой последним членом в выражении (2.2). По (2.4.6) определяем вид этой составляющей в лабораторной системе координат

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{a^2}{2(a^2 a_0 + b^2 \beta_0)} - \frac{1}{2\beta_0} \right) e_s \phi_j + \left(\frac{b^2}{2(a^2 a_0 + b^2 \beta_0)} - \frac{1}{2\beta_0} \right) e_j \phi_s - \\ & - \frac{1}{2\beta_0} \psi_{js}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эта величина должна быть усреднена по ансамблю реализаций случайной силы. С помощью формулы (2.5.2) находим

$$\langle e_s \phi_j \rangle = -D(3 \langle e_j e_s \rangle - \delta_{sj}), \quad \langle \psi_{js} \rangle = 0.$$

Таким образом, усредненное выражение (2.5) приобретает вид

$$D \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 a_0 + b^2 \beta_0)} (3 \langle e_j e_s \rangle - \delta_{sj}). \quad (2.6)$$

Теперь можно записать по (2.4) выражение для тензора напряжений, собрав все полученные формулы. Таким образом, находим тензор напряжений супензии эллипсоидальных частиц с учетом вращательного броуновского движения

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p_0 \delta_{ik} + 2\eta_0 \gamma_{ik} + \eta_0 \varphi l - \rho \langle e_j e_s \rangle \gamma_{js} \delta_{ik} + 2a \gamma_{ik} + \\ & + 2\beta D (\langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) + \zeta (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{jk} + \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \\ & + \chi \langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{sj}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\rho = \frac{1}{3ab^4 a'_0 \beta''_0} [2(a''_0 - \beta''_0) + 3ab^2 (a_0 a''_0 - \beta_0 \beta''_0)],$$

$$\alpha = 4M/ab^2 = 1/ab^4 a'_0,$$

$$\beta = 2(a^2 - b^2)/ab^2 (a^2 a_0 + b^2 \beta_0) = 3\lambda\delta,$$

$$\zeta = \frac{8}{ab^2} (L - M) = \frac{4}{(a^2 + b^2) ab^2 \beta'_0} - \frac{2}{ab^4 a'_0},$$

$$\chi = \frac{8}{ab^2} (N - 2L + M) = \frac{2a''_0}{ab^4 a'_0 \beta''_0} - \frac{8}{ab^2 (a^2 + b^2) \beta'_0} + \frac{2}{ab^4 a'_0}. \quad (2.8)$$

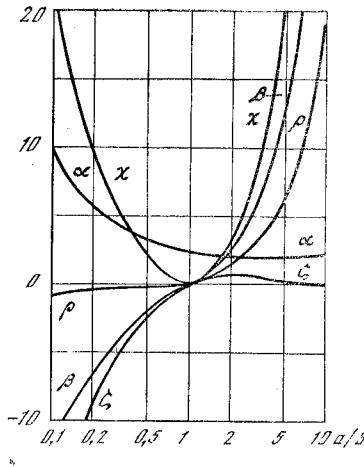


Рис. 2. Зависимость постоянных уравнений движения супензии осесимметричных эллипсоидов от отношения полуосей частицы

Значения определяемых формулами (2.8) величин⁵ при некоторых значениях отношения полуосей эллипса a/b приведены в табл. 1 и как функции a/b изображены на рис. 2.

Тензор напряжений (2.7) выражается через моменты функций распределения второго и четвертого порядка, которые вместе с другими моментами описывают среднюю ориентацию осесимметричных частиц в потоке. Рассмотрению ориентации и вычислению моментов функции распределения посвящен следующий параграф⁶.

Отметим, что если эллипсоиды вырождаются в шары, то выражение для тензора напряжений (2.7) в соответствии с результатами теории течения супензий шариков [1] принимает вид тензора напряжений вязкости

⁵ Для этих величин использованы обозначения работы [32], за исключением постоянной χ , которая заменена постоянной β , причем принято $\beta = \chi$.

⁶ Выражение для тензора напряжений разбавленной супензии осесимметричных эллипсоидов было записано после нескольких попыток. Первая работа принадлежит Хэнду [33], который, однако, не учел врачающего броуновского движения частиц. С учетом броуновского движения тензор напряжений определен в [28] для стационарного случая и в [34] в общем виде. В [32] тензор напряжений приведен в указанном здесь виде. В дальнейшем тождественное выражение для тензора напряжений было указано также в [35, 36].

жидкости с коэффициентом вязкости

$$\eta = \eta_0 [1 + (5/2) \varphi]. \quad (2.9)$$

Естественно, что в этом случае напряжения не зависят от ориентации сферической частицы и однозначно связаны с градиентами скорости. Отметим также, что при сравнении выражений (1.7) и (2.7) определяются значения всех постоянных A_α в выражении (1.7) и тем самым определяется выражение для тензора напряжений при действии на частицу супензии произвольного внешнего момента сил L_{ik} , которое имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p_0 \delta_{ik} + 2\eta_0 \gamma_{ik} + \eta_0 \varphi [-\rho \langle e_i e_s \rangle \gamma_{js} \delta_{ik} + \\ & + 2\alpha \gamma_{ik} + 2\beta D (3 \langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) + \zeta (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{jk} + \\ & + \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \chi \langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js}] + \frac{1}{2} n \lambda (\langle e_i e_j L_{jk} \rangle + \\ & + \langle e_k e_j L_{ji} \rangle) - \frac{1}{2} n \langle L_{ik} \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Значения постоянных определяются по-прежнему формулами (2.8).

Супензия эллипсоидов во внешнем поле будет рассмотрена в следующей главе. В этой главе далее будет рассмотрено течение супензии без внешних полей.

Еще одно замечание относится к более общему случаю. Исходя из феноменологической теории сплошной среды с тремя единичными векторами и частных результатов для супензии эллипсоидальных частиц, П. Б. Бегоулов и Ю. И. Шмаков [37] записали тензор напряжений супензии эллипсоидальных частиц общего вида.

§ 3. Ориентация частиц в потоке

Уравнение диффузии (2.6.4) и тензор напряжений выражаются через моменты функции распределения, которые описывают среднюю ориентацию частиц в потоке. В этом параграфе, исходя из общих результатов, полученных в предыдущей главе, рассмотрим моменты функции распределения для случая, когда нет сторонних моментов сил и когда, следовательно, скорость вращения эллипса вращения по (2.4.10) определяется выражением

$$\Omega_{is} = \omega_{is} + \lambda (e_s \gamma_{ij} - e_i \gamma_{sj}) e_j. \quad (3.1)$$

Теперь уравнение (2.5.21) приводит к уравнению для функции распределения ориентации осей симметрии эллипсоидов вращения, находящихся в потоке с заданными градиентами скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda (\gamma_{ls} e_s - \gamma_{ls} e_s e_l e_j) \frac{\partial w}{\partial e_j} + \omega_{js} e_s \frac{\partial w}{\partial e_j} - 3\lambda \gamma_{ls} e_l e_s w = \\ = D \left(\mathbf{e}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial e_j^2} - e_j e_s \frac{\partial^2 w}{\partial e_j \partial e_s} - 2e_j \frac{\partial w}{\partial e_j} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Это уравнение в стационарном случае было указано и использовано для изучения ориентации эллипсоидов вращения автором в работе [22].

Уравнение (3.2) является основным уравнением, которое позволяет рассматривать ориентацию эллипсоидов в потоке с постоянными градиентами скорости. Отметим, что поскольку уравнение (3.1) совпадает с уравнением (2.3.13), в котором градиенты скорости постоянны, то уравнение (3.2) описывает ориентацию любой осесимметричной частицы в потоке с постоянным градиентом скорости. При этом λ может принимать произвольное значение в отличие от эллипсоидальных частиц, когда $-1 < \lambda < 1$. Более того, для частиц с плоскостью симметрии, перпендикулярной оси, какими являются эллипсоиды вращения, уравнение (3.2) справедливо и для неоднородного потока с точностью до членов с первой производной градиента скорости.

В стационарном случае при симметричном тензоре градиентов скорости, когда $\omega_{ik} = 0$, уравнение (3.2) имеет простое решение

$$w = C \exp \left(\frac{\lambda}{2D} e_i e_k \gamma_{ik} \right). \quad (3.3)$$

Коэффициент C определяется при нормировке функции распределения на единицу и зависит, очевидно, от градиентов скорости, но не зависит от вектора \mathbf{e} .

При малых градиентах скорости, когда $\gamma_{ik}/D \ll 1$, решение уравнения (3.2) в стационарном случае может быть найдено приближенно. Функцию распределения в этом случае ищем, следуя [22], в виде разложения по инвариантным комбинациям вектора e_i и тензоров γ_{ik} и ω_{ik} . Определяя коэффициенты при подстановке разложения в уравнение (3.2), с точностью до членов второго

порядка по градиентам скорости находим указанное ранее в [22, 32] выражение

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2D} \gamma_{ik} e_i e_k - \frac{\lambda}{6D^2} \gamma_{si} \omega_{sk} e_i e_k + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{8D^2} \gamma_{ik} \gamma_{sj} e_i e_k e_s e_j - \frac{\lambda^2}{60D^2} \gamma_{ik} \gamma_{ik} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Бреннер и Кондиф [38] указали разложение функции распределения с точностью до членов третьего порядка по градиентам скорости.

Из разложения (3.4) следуют формулы для изученных ранее частных случаев: простого сдвига [39, 40] и однородного растяжения [41], которые были найдены при рассмотрении диффузионного уравнения, записанного в угловых переменных.

Действительно, рассматривая простой сдвиговый поток ($v_{32} \neq 0$) и переходя в систему сферических координат по формулам

$$e_1 = \cos \theta, \quad e_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad e_3 = \sin \theta \sin \varphi,$$

находим функцию распределения

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2D} v_{32} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\lambda v_{32}^2}{8D^2} \left[\frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi + \frac{\lambda}{8} (\sin^4 \theta (\cos^4 \varphi - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{15}) \right] + \dots \right\}, \end{aligned}$$

которая точно совпадает с первыми членами функции распределения, найденной Петерлином [39] в этом частном случае.

В случае простого растяжения ($v_{22} = v_{33} = -v_{11}/2$) получаем

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{4\pi} \left[1 + \frac{\lambda v_{11}}{D} (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{32} \left(\frac{\lambda v_{11}}{D} \right)^2 \times \left(9 \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta + \frac{1}{5} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Эта функция совпадает с первыми членами функции распределения, которая была найдена в [41].

Функция распределения, определяемая уравнением (3.2), содержит полную информацию о поведении частиц в потоке, которая не всегда необходима. В большинстве случаев достаточно знать лишь первые моменты функции

распределения, определяемые формулами (2.6.2). Например, для определения напряжений по формуле (2.7) необходимы моменты второго и четвертого порядка.

Отметим прежде всего, что в силу тождества $e^2 = 1$ моменты различного порядка связаны простыми соотношениями. Для первых моментов

$$\begin{aligned}\sum_j \langle e_j^2 \rangle &= 1, \quad \sum_j \langle e_i e_j^2 \rangle = \langle e_i \rangle, \\ \sum_j \langle e_j^4 \rangle + \sum_{j \neq s} \langle e_j^2 e_s^2 \rangle &= 1.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Уравнения для моментов могут быть найдены непосредственно из уравнений (2.6.5)–(2.6.8) или из уравнения (3.2). Для моментов четного порядка находим

$$\begin{aligned}\frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau_2} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + (\omega_{is} + \lambda \gamma_{is}) \langle e_s e_k \rangle + \\ &+ (\omega_{ks} + \lambda \gamma_{ks}) \langle e_s e_i \rangle - 2\lambda \gamma_{js} \langle e_j e_s e_i e_k \rangle,\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{d \langle e_i e_k e_l e_m \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau_4} \left[\langle e_i e_k e_l e_m \rangle - \frac{1}{10} (\delta_{ik} \langle e_l e_m \rangle + \right. \\ &+ \delta_{il} \langle e_k e_m \rangle + \delta_{im} \langle e_k e_l \rangle + \delta_{kl} \langle e_i e_m \rangle + \delta_{km} \langle e_i e_l \rangle + \\ &\left. - \delta_{lm} \langle e_i e_m \rangle) \right] + (\omega_{is} + \lambda \gamma_{is}) \langle e_s e_k e_l e_m \rangle - \\ &- (\omega_{ks} + \lambda \gamma_{ks}) \langle e_s e_i e_l e_m \rangle + (\omega_{ls} + \lambda \gamma_{ls}) \langle e_s e_i e_k e_m \rangle + \\ &+ (\omega_{ms} + \lambda \gamma_{ms}) \langle e_s e_i e_k e_l \rangle - 4\lambda \gamma_{js} \langle e_j e_s e_i e_k e_l e_m \rangle,\end{aligned}\quad (3.7)$$

где $\tau_2 = 1/6D$, $\tau_4 = 1/20D$.

Аналогичным образом могут быть найдены уравнения для высших моментов функции распределения. Отметим, что в уравнения для скорости изменения моментов второго порядка входят моменты четвертого порядка, в уравнение для скорости изменения моментов четвертого порядка — моменты шестого и т. д. Таким образом, система уравнений для моментов оказывается незамкнутой и не может быть решена без каких-либо дополнительных предположений. При малых отклонениях формы частиц от сферической, когда $|\lambda| \ll 1$, или при малых градиентах скорости, когда $v_{ik}/D \ll 1$, решение системы может быть найдено методом последовательных приближений.

Определим теперь выражения для моментов в стационарном случае. Если течение описывается симметричным градиентом скорости, то моменты функции распределения

могут быть найдены по функции (3.3) при любых значениях градиента скорости. Примеры такого вычисления можно найти в работе [38]. Однако в случаях, когда $\omega_{ik} \neq 0$, выражение для функции распределения неизвестно и приходится рассматривать малые и большие градиенты скорости отдельно.

При малых градиентах скорости или, иначе, при сильном броуновском движении, когда $v_{ik}/D \ll 1$, моменты функции распределения легко определяются по разложению функции распределения (3.4). При этом учитываем равновесные значения моментов

$$\begin{aligned}\langle e_i e_k \rangle_0 &= \delta_{ik}/3, \\ \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 &= (\delta_{ik} \delta_{js} + \delta_{ij} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kj})/15, \\ \langle e_i e_k e_p e_q e_r e_s \rangle_0 &= (\delta_{ik} \delta_{pq} \delta_{rs} + \dots)/105, \\ \langle e_i e_k e_p e_q e_r e_s e_m e_n \rangle_0 &= (\delta_{ik} \delta_{pq} \delta_{rs} \delta_{mn} + \dots)/945.\end{aligned}\quad (3.8)$$

В последних выражениях точки обозначают невыписаные члены со всеми остальными возможными комбинациями индексов. В последней формуле содержится всего 105 членов, в предпоследней — 45.

Вычисленные таким способом и указанные ранее [22, 32] выражения для моментов второго и четвертого порядков имеют вид

$$\begin{aligned}\langle e_j e_s \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{js} + \frac{\lambda}{15D} \gamma_{js} - \frac{\lambda}{90D^2} (\gamma_{lj} \omega_{ls} + \gamma_{ls} \omega_{lj}) - \\ &- \frac{\lambda^2}{315D^2} \gamma_{ik} \gamma_{ik} \delta_{js} + \frac{\lambda^2}{105D^2} \gamma_{jl} \gamma_{ls} + \dots,\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\langle e_j e_s e_m e_n \rangle &= \frac{1}{15} \Delta_{jsmn} + \frac{\lambda}{105D} (\gamma_{js} \delta_{mn} + \dots) - \\ &- \frac{\lambda}{630D^2} [(\gamma_{jl} \omega_{ls} + \gamma_{sl} \omega_{lj}) \delta_{mn} + \dots] - \\ &- \frac{4\lambda^2}{4725D^2} \gamma_{ik} \gamma_{ik} \Delta_{jsmn} + \frac{\lambda^2}{945D^2} (\gamma_{jl} \gamma_{ls} \delta_{nm} + \dots) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{945D^2} (\gamma_{js} \gamma_{mn} + \gamma_{jm} \gamma_{sn} + \gamma_{jn} \gamma_{sm}) + \dots,\end{aligned}\quad (3.10)$$

где $\Delta_{jsmn} = \delta_{js} \delta_{mn} + \delta_{jn} \delta_{sn} + \delta_{jn} \delta_{ms}$. Точки в последней формуле означают члены со всеми остальными комбинациями индексов. Бреннер и Кондиф [38] указали выражение для моментов с точностью до членов третьего порядка по градиентам скорости.

В другом предельном случае, когда $v_{ik}/D \gg 1$, т. е. при больших градиентах скорости или слабом броуновском движении, моменты функции распределения удовлетворяют уравнениям, которые следуют из уравнений (3.6) и (3.7) при $D \rightarrow 0$. Первое из них имеет вид

$$(\omega_{is} + \lambda\gamma_{is})\langle e_s e_k \rangle_\infty + (\omega_{ks} + \lambda\gamma_{ks})\langle e_s e_i \rangle_\infty - 2\lambda\gamma_{js}\langle e_j e_s e_i e_k \rangle_\infty = 0. \quad (3.11)$$

Когда $\omega_{ik} = 0$ и частицы приобретают при больших градиентах скорости предельную ориентацию, предельные значения моментов могут быть просто найдены из соотношений (3.5) и (3.11) с учетом симметрии течения. Пример такого определения будет приведен далее в § 6 этой главы.

Если же $\omega_{ik} \neq 0$, то частица вращается в потоке и не приобретает предельную ориентацию. При этом соотношения (3.5) и (3.11) также могут быть полезны для определения значений моментов. Принципиальный подход к этим случаям наметили Хинч и Лил [35].

Для важного случая простого сдвигового течения они нашли функцию распределения и вычислили моменты при больших градиентах скорости.

§ 4. Вязкоупругость супензии

В предыдущих параграфах сформулировано уравнение для тензора напряжений, который выражается через моменты функции распределения второго и четвертого порядка, и указан способ определения бесконечной цепочки уравнений для моментов функции распределения, первыми из которых являются уравнения (3.6) и (3.7). Эти уравнения вместе с выражением для тензора напряжений (2.7) определяют тензор напряжений через кинематические характеристики, т. е. являются, как говорят, определяющими уравнениями.

Определяющее уравнение вместе со стандартными уравнениями непрерывности и движения (1.1.1) и (1.1.10) составляют систему уравнений движения супензии эллипсоидов вращения в случае, когда оказывается существенным вращательное броуновское движение частиц, т. е. размеры частиц не превышают $10^{-5} - 10^{-4}$ см.

Система уравнений движения должна быть дополнена условиями, определяющими значение скорости и моментов на границах прибора, где движется супензия, однако

этот вопрос о граничных условиях нуждается в дополнительном исследовании.

Сформулированная система уравнений движения оказывается незамкнутой, и анализ движения супензии не может быть выполнен без каких-либо приближений. При малых отклонениях формы частиц от сферической, когда $|\lambda| \ll 1$, или при малых градиентах скорости, когда $v_{ik}/D \ll 1$, можно воспользоваться методом последовательных приближений. Далее изучается случай, когда градиенты скорости малы.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда времена деформирования сопоставимы с временами релаксации системы. Найдем для этого случая определяющее уравнение, т. е. соотношение между тензором напряжений и тензором градиентов скорости, предполагая, что моменты функции распределения не зависят от координат.

Уможим уравнения (3.6) и (3.7) соответственно на e^{t/τ_2} и e^{t/τ_4} и проинтегрируем по t' от t до $-\infty$. После интегрирования по частям и введения новой переменной $s = t - t'$ находим соотношения

$$\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau_2}} [(\omega_{ij} + \lambda\gamma_{ij})\langle e_j e_k \rangle + (\omega_{kj} + \lambda\gamma_{kj})\langle e_j e_i \rangle - 2\lambda\gamma_{sj}\langle e_s e_i e_k \rangle]_{t-s} ds, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k e_l e_m \rangle = & \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau_4}} \left[\frac{1}{10\tau_4} (\delta_{ik}\langle e_l e_m \rangle + \delta_{il}\langle e_k e_m \rangle + \delta_{im}\langle e_k e_l \rangle + \delta_{km}\langle e_i e_m \rangle + \delta_{km}\langle e_i e_l \rangle + \delta_{lm}\langle e_i e_k \rangle) + \right. \\ & + (\omega_{is} + \lambda\gamma_{is})\langle e_s e_k e_l e_m \rangle + (\omega_{ks} + \lambda\gamma_{ks})\langle e_s e_i e_l e_m \rangle + (\omega_{ls} + \lambda\gamma_{ls})\langle e_s e_i e_k e_m \rangle + (\omega_{ms} + \lambda\gamma_{ms})\langle e_s e_i e_l e_k \rangle - \\ & \left. - 4\lambda\gamma_{sj}\langle e_s e_j e_i e_k e_l e_m \rangle \right]_{t-s} ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подынтегральные функции в квадратных скобках берутся в момент времени $t - s$.

Так как равновесные значения моментов известны и определяются формулами (3.8), то соотношения (4.1) и (4.2) могут быть использованы для определения разложения моментов функции распределения в ряд по малым градиентам скорости. Например, из (3.8) и (4.1) с точностью

до членов первого порядка по градиентам скорости находим

$$\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{2}{5} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau_2}} \gamma_{ik}(t-s) ds. \quad (4.3)$$

Теперь по (4.2) с помощью (3.8) и (4.3) могут быть найдены моменты четвертого порядка с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости, затем по (4.1) определены моменты второго порядка с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости и т.д. Эти соотношения в общем виде выглядят довольно громоздко.

Из выражений (2.7) и (4.3) находим в линейном приближении определяющее уравнение супензии эллипсоидов вращения

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p\delta_{ik} + 2\eta_0 \left[1 + \varphi \left(a + \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{15}\chi \right) \right] \gamma_{ik} + \\ & + \frac{6}{5} nT\lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau_2}} \gamma_{ik}(t-s) ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) имеет вид определяющего уравнения линейной вязкоупругой жидкости с единственным временем релаксации τ_2 . Естественно, что супензия в этом приближении проявляет все эффекты, присущие линейной вязкоупругой жидкости с одним временем релаксации, например, зависимость коэффициента вязкости от частоты воздействия.

Нет необходимости выписывать результаты, определяемые уравнением (4.4) в частных случаях, так как линейная вязкоупругая жидкость хорошо изучена. Однако супензия эллипсоидов является нелинейной вязкоупругой жидкостью, свойства которой были изучены в [42, 43].

Рассмотрим теперь установившееся движение супензии, т. е. движение при характеристических временах $t \gg \tau_2$. В этом случае уравнение (3.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} & -2D(3\langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) + (\omega_{is} + \lambda\gamma_{is})\langle e_s e_k \rangle + \\ & + (\omega_{ks} + \lambda\gamma_{ks})\langle e_s e_i \rangle - 2\lambda\gamma_{js}\langle e_j e_s e_i e_k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

С помощью этого уравнения тензор напряжений для стационарных однородных течений может быть представлен в двух других формах.

Во-первых, умножим (4.5) на $\eta_0\varphi\chi/2\lambda$ и прибавим к выражению (2.7), после чего найдем выражение для тен-

зора напряжений, в котором исключен момент четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p_0\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik} + \eta_0\varphi \left[-\rho\langle e_j e_s \rangle \gamma_{js}\delta_{ik} + 2\alpha\gamma_{ik} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\lambda} (\omega_{is}\langle e_s e_k \rangle + \omega_{ks}\langle e_s e_i \rangle) + \\ & + \left(2\beta - \frac{\chi}{\lambda} \right) D(3\langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) + \\ & \left. + \left(\zeta + \frac{1}{2}\chi \right) (\gamma_{is}\langle e_s e_k \rangle + \gamma_{ks}\langle e_s e_i \rangle) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Во-вторых, умножая (4.5) на $\eta_0\varphi\beta$ и прибавляя к выражению (2.7), получаем выражение для тензора напряжений, в которое моменты входят только в виде композитов с градиентами скорости:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p_0\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik} + \eta_0\varphi \left[-\rho\langle e_j e_s \rangle \gamma_{js}\delta_{ik} + 2\alpha\gamma_{ik} + \right. \\ & + (\zeta + \beta\lambda)(\langle e_i e_s \rangle \gamma_{sk} + \langle e_k e_s \rangle \gamma_{si}) + \beta(\omega_{is}\langle e_s e_k \rangle + \\ & \left. + \omega_{ks}\langle e_s e_i \rangle) + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для вычисления напряжений по (4.6) необходимо знать лишь моменты второго порядка с той точностью, с какой необходимо найти напряжения. Во втором случае по формуле (4.7) значения напряжений вычисляются по моментам второго и четвертого порядков. Преимущество этого выражения в том, что оно при заданной точности моментов определяет напряжение с большей точностью по сравнению с выражением (2.7). Например, с помощью вычисленных с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости моментов (3.9) и (3.10) можно записать тензор напряжений и определить в стационарном случае компоненты тензора напряжений с точностью до членов третьего порядка. Мы не выписываем здесь общее выражение для тензора напряжений, которое получилось бы, если бы моменты (3.9) и (3.10) подставить в выражение (4.7), а рассмотрим тензор напряжений только в линейном приближении.

Из (4.7) с учетом (3.9) и (3.10) с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости следует выражение

$$\sigma_{ik} = -p_0\delta_{ik} + 2\eta_0\gamma_{ik}, \quad (4.8)$$

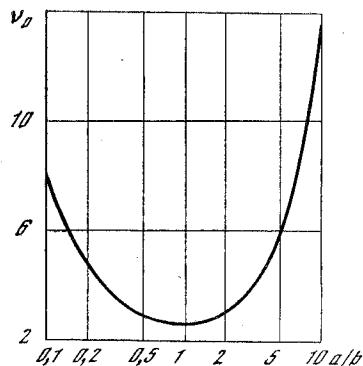


Рис. 3. Зависимость характеристической начальной вязкости супензии осесимметричных эллипсоидов от отношения полуосей частицы

где введен коэффициент начальной сдвиговой вязкости

$$\eta_{\text{н}} = \eta_0 \left[1 + \Phi \left(a + \frac{1}{5} \beta \lambda + \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{15} \chi \right) \right], \quad (4.9)$$

который является обычным коэффициентом вязкости для течений с малыми градиентами скорости. Значения характеристической вязкости

$$v_0 = \frac{\eta_{\text{н}} - \eta_0}{\eta_0 \Phi} = a + \frac{1}{5} \beta \lambda + \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{15} \chi \quad (4.10)$$

для некоторых значений отношения полуосей эллипса приведены в табл. 2 и на рис. 3. Значения характеристической вязкости, вычисленной по (4.10), совпадают со значениями, полученными ранее [44, 45].

При больших градиентах скорости в случае стационарного течения появляются нелинейные эффекты, связанные с ориентацией частиц. Движение супензии уже не может быть описано с помощью одного коэффициента вязкости, в отличие от течений ньютоновской несжимаемой жидкости. Для стационарных движений супензии может быть введен коэффициент эффективной вязкости, градиентная зависимость которого различна для различных типов движений. Нелинейный характер течения супензии будет продемонстрирован в следующих параграфах на двух примерах движения: простой сдвиговой деформации и продольной деформации.

Для того чтобы в рассматриваемом случае сформулировать нелинейную систему определяющих уравнений с феноменологической точки зрения, следовало бы включить в рассмотрение все четные моменты, т. е. внутренние

Таблица 2
Характеристическая вязкость и коэффициенты нормальных напряжений супензии при простом сдвиге

a/b	v_0	H	v_∞	F_1	$-F_2$	F_3
0,01	69,4	0,778		6,13	2,45	8,59
0,015	46,6	0,519		4,09	1,63	5,72
0,02	35,2	0,384	3,17	3,05	1,19	4,24
0,03	23,8	0,256		2,04	0,785	2,82
0,04	18,2	0,192	3,02	1,53	0,582	2,11
0,05	14,8	0,153		1,23	0,460	1,69
0,07	10,9	0,109		0,877	0,321	1,20
0,1	8,04	0,075	2,94	0,612	0,216	0,828
0,15	5,81	0,048		0,400	0,133	0,534
0,2	4,71	0,035	2,78	0,290	0,091	0,382
0,3	3,64	0,020		0,172	0,049	0,224
0,4	3,13	0,012		0,107	0,028	0,135
0,5	2,85	0,007	2,57	0,066	0,016	0,082
0,7	2,59	0,002		0,020	0,004	0,024
1,0	2,50	0,000	2,50	0,000	0,000	0,000
1,5	2,63	0,003		0,031	0,004	0,035
2	2,91	0,009	2,57	0,098	0,041	0,108
3	3,68	0,023	2,68	0,274	0,025	0,300
4	4,66	0,040	2,80	0,488	0,041	0,529
5	5,81	0,060	2,92	0,731	0,059	0,791
7	8,53	0,107	3,14	1,30	0,405	1,44
10	13,6	0,196	3,44	2,37	0,498	2,57
15	24,6	0,390		4,67	0,418	5,08
20	38,6	0,639		7,57	0,715	8,29
30	74,7	1,291		15,1	1,53	16,7
40	121	2,142		24,9	2,63	27,5
50	178	3,186	7,68	36,9	4,01	40,9
70	323	5,849		67,2	7,58	74,8
100	618	11,3		129	15,0	144

параметры — тензоры четных рангов. Однако, если ограничиться рассмотрением линейных по градиентам скорости эффектов, то легко видеть, что определяющие уравнения супензии жестких эллипсоидов содержат лишь моменты второго порядка и рассматриваемый случай совпадает с примером, рассмотренным в первой главе (система уравнений (1.3.6) и (1.3.7)).

§ 5. Напряжения и вязкость при простом сдвиге

Течение суспензий изучается, как правило, на приборах, в которых реализуется сдвиговое движение. В связи с этим особый интерес вызывает простое сдвиговое движение суспензии, которое было изучено [44—46] еще до того, как были сформулированы общие уравнения движения. В этом параграфе поведение суспензии эллипсоидов вращения будет рассмотрено на основе общих уравнений. Полученные для этого частного случая формулы совпадают с известными результатами.

Рассматриваем стационарное течение суспензии, когда только одна компонента тензора градиента скорости отлична от нуля и постоянна. Пусть $v_{12} \neq 0$. При этом из выражения (4.7) следует, что отличные от нуля компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p_0 + \eta_0\varphi[-\rho\langle e_1e_2\rangle + (\zeta + \beta\lambda)\langle e_1e_2\rangle + \\ &\quad + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_1^3e_2\rangle + \beta\langle e_1e_2\rangle]v_{12}, \\ \sigma_{22} &= -p_0 + \eta_0\varphi[-\rho\langle e_1e_2\rangle + (\zeta + \beta\lambda)\langle e_1e_2\rangle + \\ &\quad + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_1e_2^3\rangle - \beta\langle e_1e_2\rangle]v_{12}, \\ \sigma_{33} &= -p_0 + \eta_0\varphi[-\rho\langle e_1e_2\rangle + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_1e_2e_3^2\rangle]v_{12}, \\ \sigma_{12} &= \eta_0\left\{1 + \varphi\left[\alpha + \frac{1}{2}(\zeta + \beta\lambda)(\langle e_1^2\rangle + \langle e_2^2\rangle) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{2}\beta(\langle e_2^2\rangle - \langle e_1^2\rangle) + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_1^2e_2^2\rangle\right]\right\}v_{12}. \quad (5.1)\end{aligned}$$

Из выражений (5.1) определяем величины, которые могут быть измерены на опыте, — коэффициент сдвиговой вязкости и разности нормальных напряжений

$$\eta = \eta_0\left\{1 + \varphi\left[\alpha + \frac{1}{2}(\zeta + \beta\lambda)(\langle e_1^2\rangle + \langle e_2^2\rangle) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}\beta(\langle e_2^2\rangle - \langle e_1^2\rangle) + (\chi - 2\beta\lambda)\langle e_1^2e_2^2\rangle\right]\right\}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} - \sigma_{33} &= [(\zeta + \beta\lambda)\langle e_1e_2\rangle + (\chi - 2\beta\lambda)(\langle e_1^3e_2\rangle - \\ &\quad - \langle e_1e_2e_3^2\rangle) + \beta\langle e_1e_2\rangle]v_{12}, \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= [(\zeta + \beta\lambda)\langle e_1e_2\rangle + (\chi - 2\beta\lambda)(\langle e_1e_2^3\rangle - \\ &\quad - \langle e_1e_2e_3^2\rangle) - \beta\langle e_1e_2\rangle]v_{12}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= [(\chi - 2\beta\lambda)(\langle e_1^3e_2\rangle - \langle e_1e_2^3\rangle) + 2\beta\langle e_1e_2\rangle]v_{12}. \quad (5.3)\end{aligned}$$

Интересующие нас величины выражаются через моменты функции распределения, которые в рассматриваемом стационарном случае по формулам (3.9) и (3.10) определяем с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости

$$\begin{aligned}\langle e_1^2 \rangle &= \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{180}P^2 + \frac{\lambda^2}{1260}P^2, \quad \langle e_2^2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{180}P^2 + \frac{\lambda^2}{1260}P^2, \\ \langle e_3^2 \rangle &= \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{630}P^2, \quad \langle e_1e_2 \rangle = \frac{\lambda}{30}P, \\ \langle e_1^3e_2 \rangle &= \frac{\lambda}{70}P^2, \quad \langle e_1^2e_2^2 \rangle = \frac{1}{15} + \frac{\lambda^2}{1575}P^2, \\ \langle e_1e_3^3 \rangle &= \frac{\lambda}{70}P, \quad \langle e_1e_2e_3^2 \rangle = \frac{\lambda}{210}P, \quad (5.4)\end{aligned}$$

где $P = v_{12}/D$.

Рассмотрим вначале коэффициент сдвиговой вязкости. При малых градиентах скорости из соотношений (5.2) и (5.4) с точностью до членов второго порядка находим

$$\eta = \eta_0[1 + \varphi(v_0 - HP^2)], \quad (5.5)$$

где v_0 определена формулой (4.10), а безразмерная функция H имеет вид

$$H = \lambda^2\left(\frac{1}{60}\delta + \frac{1}{2100}\lambda\beta - \frac{1}{1260}\zeta - \frac{1}{1575}\chi\right). \quad (5.6)$$

Значения величин v_0 и H для некоторых значений отношения a/b приведены в табл. 2.

Величина H всегда положительна, и потому коэффициент сдвиговой вязкости, определяемый выражением (5.5), всегда убывает с увеличением градиента скорости при малых градиентах скорости.

В общем виде сдвиговая вязкость может быть, очевидно, представлена как разложение по четным степеням градиента скорости. Значение характеристической сдвиговой вязкости

$$v = (\eta - \eta_0)/\varphi\eta_0$$

для значений a/b от 1 до 50 и градиентов скорости P до 60 были определены в работе Шерага [46]. Для тех же значений параметра, но для градиентов скорости до 600, значения характеристической вязкости приведены в работе [47]. Характеристическая сдвиговая вязкость явля-

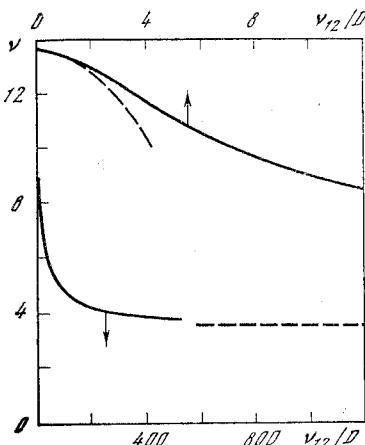


Рис. 4. Зависимость характеристической сдвиговой вязкости суспензии эллипсоидов от безразмерного градиента скорости при отношении полуосей $a/b = 10$

градиента скорости по данным [46, 47] для суспензии при $a/b = 10$. Верхняя пунктирная кривая вычислена по формуле (5.5), а нижняя представляет предельное значение характеристической вязкости по вычислениям [35].

Обратимся теперь к рассмотрению нормальных напряжений. Из соотношений (5.3) и (5.4) находим с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости

$$\begin{aligned}\sigma_{11} - \sigma_{33} &= \frac{\Phi\eta_0}{D} F_1 v_{12}^2, & \sigma_{22} - \sigma_{33} &= \frac{\Phi\eta_0}{D} F_2 v_{12}^2, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \frac{\Phi\eta_0}{D} F_3 v_{12}^2,\end{aligned}\quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= \lambda \left[\frac{1}{10} \left(\frac{\lambda}{7} + \frac{1}{3} \right) \beta + \frac{1}{30} \zeta + \frac{1}{105} \chi \right], \\ F_2 &= \lambda \left[\frac{1}{10} \left(\frac{\lambda}{7} - \frac{1}{3} \right) \beta + \frac{1}{30} \zeta + \frac{1}{105} \chi \right], \quad F_3 = \frac{1}{15} \lambda \beta.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Величина $F_3 = F_1 - F_2$, так что можно рассматривать только две из этих функций, например, F_1 и F_2 . Значения

ется монотонной убывающей функцией градиентов скорости при всех значениях отношения a/b .

Представляет интерес определить предельное значение характеристической вязкости при очень больших градиентах скорости. Это удалось сделать сравнительно недавно Хинчу и Лилу [35]. В табл. 2 приведены вычисленные ими предельные значения характеристической вязкости для некоторых значений a/b .

В качестве иллюстрации на рис. 4 приведена зависимость характеристической сдвиговой вязкости от градиента скорости по данным [46, 47] для суспензии при $a/b = 10$. Верхняя пунктирная кривая вычислена по формуле (5.5), а нижняя представляет предельное значение характеристической вязкости по вычислениям [35].

характеристических нормальных напряжений F_1 и $-F_2$ для некоторых значений a/b приведены в табл. 2.

В более общем случае, когда градиенты скорости не очень малы, разности нормальных напряжений также можно представить в виде (5.7), однако при этом величины F_1 , F_2 , F_3 являются функциями не только отношения полуосей эллипсоида, но и градиентов скорости. Эти функции были определены впервые Гизекусом [48] при малых градиентах скорости. Функции $\Sigma_2 = F_1 P^2$ и $\Sigma_1 = F_2 P^2$ были определены и табулированы в [36] в области значений a/b от 1/50 до 50 и значений безразмерного градиента скорости до $P = 60$. Характеристические разности нормальных напряжений Σ_2 и $-\Sigma_1$ являются монотонно возрастающими функциями и при очень больших градиентах скорости принимают предельные значения, которые были определены в [35] (см. также [36]).

§ 6. Вязкость при продольной деформации

Другим простым частным случаем, который представляет интерес и также рассматривался ранее [41], является продольная деформация, при которой система деформируется с градиентом v_{11} . В силу условия несжимаемости $v_{22} = v_{33} = -v_{11}/2$.

Рассматривая стационарный случай, вычислим эффективную продольную вязкость, которую определим, подобно эффективной сдвиговой вязкости, как отношение

$$\bar{\eta} = \sigma_{11}/v_{11}. \quad (6.1)$$

Для ньютоновских несжимаемых жидкостей, определяющее уравнение которых имеет вид (1.3.2), соотношение между коэффициентами продольной и сдвиговой вязкости легко определяется и имеет вид

$$\bar{\eta} = 3\eta. \quad (6.2)$$

Определим продольную вязкость для суспензии эллипсоидов вращения.

Вычисляя по (4.7) компоненты тензора напряжений в стационарном случае и исключая давление, находим выражение для растягивающего напряжения

$$\sigma_{11} = \bar{\eta} v_{11},$$

где коэффициент продольной вязкости выражается через моменты функции распределения

$$\bar{\eta} = \eta_0 \left\{ 3 + \varphi [3a + (\zeta + \beta\lambda)(2\langle e_1^2 \rangle + \langle e_2^2 \rangle) + \frac{1}{2}(\chi - 2\beta\lambda)(2\langle e_1^4 \rangle + \langle e_2^4 \rangle - 4\langle e_1^2 e_2^2 \rangle + \langle e_2^2 e_3^2 \rangle)] \right\}. \quad (6.3)$$

Асимптотические значения коэффициента продольной вязкости при малых и больших градиентах скорости могут быть легко найдены.

При малых градиентах скорости из выражений (3.9) следует, что все моменты второго порядка с различными индексами равны нулю. Моменты второго порядка с одинаковыми индексами, так же как и необходимые для вычисления коэффициента вязкости моменты четвертого порядка по формулам (3.9) и (3.10), следующие:

$$\begin{aligned} \langle e_1^2 \rangle &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\lambda P + \frac{1}{210}\lambda^2 P^2, \\ \langle e_2^2 \rangle &= \langle e_3^2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda P - \frac{1}{420}\lambda^2 P^2, \\ \langle e_1^4 \rangle &= \frac{1}{5} + \frac{2}{35}\lambda P + \frac{1}{175}\lambda^2 P^2, \\ \langle e_2^4 \rangle &= \langle e_3^4 \rangle = \frac{1}{5} - \frac{1}{35}\lambda P - \frac{1}{700}\lambda^2 P^2, \\ \langle e_1^2 e_2^2 \rangle &= \langle e_1^2 e_3^2 \rangle = \frac{1}{15} + \frac{1}{210}\lambda P - \frac{1}{2100}\lambda^2 P, \\ \langle e_2^2 e_3^2 \rangle &= \frac{1}{15} - \frac{1}{105}\lambda P - \frac{1}{2100}\lambda^2 P, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $P = v_{11}/D$.

Выражения (6.3) и (6.4) определяют с точностью до членов второго порядка по градиенту скорости выражение для продольной вязкости

$$\bar{\eta} = 3\eta_n + \eta_0 \varphi (H_1 P + H_2 P^2 + \dots), \quad (6.5)$$

где η_n определено выражением (4.9), а безразмерные функции H_1 и H_2 имеют вид

$$H_1 = \lambda \left(\frac{1}{10}\zeta + \frac{2}{35}\chi + \frac{3}{70}\beta\lambda \right),$$

$$H_2 = \lambda^2 \left(\frac{1}{140}\zeta + \frac{1}{175}\chi - \frac{3}{700}\beta\lambda \right).$$

Таблица 3
Характеристическая вязкость суспензии при продольной деформации

a/b	\bar{v}_0	H_1	H_2	\bar{v}_∞	
				Растяжение	Сжатие
0,01	208	-0,533	0,563	227	129
0,015	140	-0,337	0,376	153	87,2
0,02	105	-0,251	0,275	115	66,9
0,03	74,5	-0,149	0,184	78,4	45,7
0,04	54,6	-0,098	0,138	59,8	35,2
0,05	44,4	-0,066	0,111	48,7	28,8
0,07	32,8	-0,030	0,079	36,0	21,6
0,1	24,1	0,000	0,055	26,5	16,2
0,15	17,4	0,023	0,036	19,1	12,1
0,2	14,1	0,035	0,026	15,5	10,1
0,3	10,9	0,046	0,046	11,9	8,29
0,4	9,40	0,045	0,040	10,1	7,51
0,5	8,56	0,038	0,006	9,14	7,17
0,7	7,78	0,017	0,002	8,11	7,06
1,0	7,50	0,000	0,000	7,50	7,50
1,5	7,89	0,051	0,003	8,88	7,34
2	8,72	0,179	0,008	10,7	7,56
3	11,1	0,548	0,023	15,0	8,45
4	14,0	1,00	0,039	20,2	9,66
5	17,4	1,51	0,057	26,0	11,1
7	25,6	2,71	0,096	39,6	14,4
10	40,9	4,88	0,164	64,3	20,6
15	73,9	9,49	0,301	116	33,6
20	116	15,3	0,466	181	49,8
30	224	30,1	0,873	347	9,12
40	364	49,2	1,38	557	14,4
50	535	72,3	1,98	813	20,8
70	969	131	3,47	1456	36,8
100	1853	250	6,45	2758	69,4

Значения величин H_1 и H_2 для некоторых значений отношения a/b приведены в табл. 3. Величина H_1 всегда положительна, и потому продольная вязкость возрастает с увеличением градиента скорости при растяжении и уменьшается при сжатии. Выражение (6.5) определяет первые

члены разложения продольной вязкости по градиентам скорости, которое, в отличие от сдвиговой вязкости, включает также члены нечетных порядков. Правильное выражение для продольной вязкости с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости было дано в работе [28].

При больших градиентах скорости, когда достигается полная ориентация эллипсоидов в потоке, значения моментов могут быть легко определены из симметрии течения с помощью соотношений (3.5).

Для суспензии вытянутых эллипсоидов находим при растяжении

$$\begin{aligned}\langle e_1^2 \rangle &= 1, & \langle e_2^2 \rangle = \langle e_3^2 \rangle = \langle e_1^2 e_2^2 \rangle = \langle e_2^2 e_3^2 \rangle = 0, & \langle e_1^4 \rangle = 1, \\ \langle e_2^4 \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (6.6)$$

при сжатии

$$\begin{aligned}\langle e_1^2 \rangle &= 0, & \langle e_2^2 \rangle = \langle e_3^2 \rangle = 1/2, & \langle e_1^2 e_2^2 \rangle = 0, & \langle e_1^4 \rangle = 0, \\ \langle e_2^4 \rangle + \langle e_2^2 e_3^2 \rangle &= 1/2.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Для суспензии сплюснутых эллипсоидов значения моментов (6.6) имеют место при сжатии, а значения (6.7) — при растяжении.

Теперь выражения (6.6), (6.7) и (6.3) определяют асимптотическое значение коэффициента продольной вязкости при больших градиентах скорости. Для суспензии вытянутых эллипсоидов при растяжении

$$\bar{\eta}_\infty = \eta_0 [3 + \varphi (3a + 2\zeta + \chi)], \quad (6.8)$$

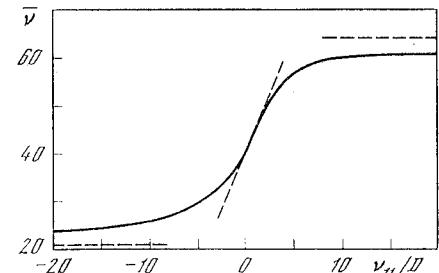
при сжатии

$$\bar{\eta}_\infty = \eta_0 \left[3 + \varphi \left(3a + \frac{1}{2} \zeta + \frac{1}{4} \chi \right) \right]. \quad (6.9)$$

Коэффициент продольной вязкости суспензии сплюснутых эллипсоидов определяется выражением (6.8) при сжатии, а выражением (6.9) — при растяжении. Асимптотические значения характеристической продольной вязкости

$$\bar{v} = (\bar{\eta} - 3\eta_0)/\eta_0 \varphi \quad (6.10)$$

Рис. 5. Зависимость характеристической продольной вязкости суспензии эллипсоидов от безразмерного градиента скорости при отношении полуосей частицы $a/b = 10$



для некоторых значений отношения полуосей эллипса приведены в табл. 3.

Отметим, что предельные значения коэффициента продольной вязкости суспензии (6.8) и (6.9) не зависят от коэффициента диффузии и, следовательно, от броуновского движения частиц. Однако скорость достижения предельных значений (см. формулу (6.5)) определяется интенсивностью броуновского движения.

Полное решение задачи о продольной деформации суспензии было дано в [38]. Коэффициент продольной вязкости как функция градиентов скорости монотонно возрастает, когда градиент скорости меняется от $-\infty$ до $+\infty$. В работе [36] для отношений a/b от 1/50 до 50 приведены значения $\bar{v}/3$ во всем интервале градиентов скорости. В качестве примера на рис. 5 приведена зависимость характеристической продольной вязкости от градиента скорости по данным работы [36] для суспензии эллипсоидов при $a/b = 10$. Пунктиром на этом же рисунке указаны асимптотические значения.

Глава 4

ДИНАМИКА СУСПЕНЗИИ В ПОЛЕ

§ 1. Напряжения в супензии, движущейся в поле

В предыдущей главе была рассмотрена динамика супензии в случае, если на частицы действуют момент гидродинамических сил, приводящий к ориентации частиц потоком, и момент случайных сил, вызывающий дезориентацию частиц. Аналогичным образом можно рассмотреть движение частиц и свойства супензии в случае, если на частицы непосредственно действуют, кроме того, какие-либо сторонние моменты сил.

Для определенности далее рассматриваем движение частиц в электрическом поле, однако полученные результаты справедливы при соответствующей замене обозначений для супензии частиц с магнитным диполем, движущимся в магнитном поле, а также для движущейся в гравитационном поле супензии всплывающих частиц, у которых центр масс не совпадает с геометрическим центром.

Пусть супензия находится в электрическом однородном поле с напряженностью E . При этом на частицу, обладающую дипольным моментом \mathcal{P} , который может быть постоянным или индуцированным, действует момент сил [49]

$$\mathbf{L} = [\mathcal{P}\mathbf{E}] \quad \text{или} \quad L_{jk} = \mathcal{P}_k E_j - \mathcal{P}_j E_k. \quad (1.1)$$

Если поле неоднородно, то на частицу дополнительно действует сила $\mathbf{f} = (\mathcal{P}\nabla) \mathbf{E}$, которая должна быть учтена при формулировке уравнений движения.

Предполагаем, что частица может обладать постоянным дипольным моментом μ , который жестко связан с частицей, т. е. не меняет своей ориентации относительно частицы. Кроме того, диэлектрическая анизодиаметрическая частица в поле приобретает индуцированный дипольный момент. Если главные оси тензора диэлектри-

ческой проницаемости совпадают с осями эллипсоида, то выражение для дипольного момента эллипсоида в системе координат, связанной с осями частицы, имеет по [49] вид

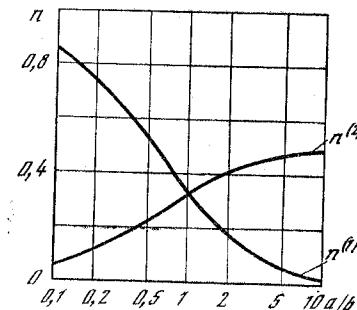
$$\mathcal{P}'_k = \frac{1}{3} abc \frac{\varepsilon^{(k)} - \varepsilon}{\varepsilon + (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon)n^{(k)}} E'_k,$$

где $\varepsilon^{(k)}$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости частицы; ε — диэлектрическая проницаемость жидкости; $n^{(k)}$ — коэффициенты деполяризации, выражения для которых имеют вид

$$n^{(k)} = a_{k0} abc / 2.$$

Формулы для a_{k0} определены в § 3 главы 2. Для эллипсоидов вращения $n^{(2)} = n^{(3)} = (1 - n^{(1)})/2$. Значения $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ для некоторых значений отношения полуосей эллипсоида приведены на рис. 6.

Рис. 6. Зависимость коэффициентов деполяризации осесимметричного эллипсоида от отношения полуосей частицы



Ограничивааясь далее рассмотрением эллипсоидов вращения, записываем, следуя работе [22], выражение для дипольного момента в лабораторной системе координат

$$\mathcal{P}_k = \frac{ab^2}{3\varphi} (\varepsilon_0 - \varepsilon) E_k + \frac{1}{3} ab^2 \gamma \left(e_k e_i - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) E_i, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon + \\ &+ \varphi \frac{\varepsilon [3\varepsilon(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon) + \varepsilon(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) + (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon)(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon)(n^{(2)} + 2n^{(1)})]}{3[\varepsilon + (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon)n^{(1)}][\varepsilon + (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon)n^{(2)}]}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) + \varepsilon(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon)(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon)(n^{(2)} - n^{(1)})}{[\varepsilon + (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon)n^{(1)}][\varepsilon + (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon)n^{(2)}]}. \quad (1.4)$$

Диэлектрические проницаемости частиц $\epsilon^{(1)}$ и $\epsilon^{(2)}$ обычно мало отличаются от диэлектрической проницаемости жидкости. В этом случае выражения (1.3) и (1.4) могут быть разложены в ряд по малым величинам $\epsilon^{(1)}/\epsilon - 1$ и $\epsilon^{(2)}/\epsilon - 1$. Например, для коэффициентов γ находим первые члены разложения⁷:

$$\gamma \approx \epsilon^{(1)} - \epsilon^{(2)} - \epsilon (\epsilon^{(1)}/\epsilon - 1)^2 n^{(1)} + \epsilon (\epsilon^{(2)}/\epsilon - 1)^2 n^{(2)}. \quad (1.5)$$

Отметим, что в соответствии с известными [49] результатами для суспензии изотропных шариков при $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} = \epsilon^0$ из (1.3) и (1.4) следует

$$\epsilon_0 = \epsilon + \varphi \frac{3\epsilon(\epsilon^0 - \epsilon)}{2\epsilon + \epsilon^0}, \quad \gamma = 0. \quad (1.6)$$

Предполагая для простоты, что направление постоянного диполя совпадает с осью симметрии частицы, с помощью (1.2) записываем теперь выражение для действующего на частицу в рассматриваемом случае момента сил

$$L_{jk} = \mu (e_k E_j - e_j E_k) + q e_s E_s (e_k E_j - e_j E_k), \quad (1.7)$$

где $q = ab^2\gamma/3$. Этот момент сил стремится ориентировать ось частицы вдоль направления поля.

Для определения выражения тензора напряжений исходим из выражения (3.2.1), в котором диагональные члены матрицы A_{ik} определяются выражением (2.2.8), а недиагональные — формулой (2.4.16). Легко видеть, что по сравнению с ранее рассмотренным случаем остается отдельно определить дополнительные члены тензора напряжений

$$-\frac{3\varphi}{4\pi ab^2} \frac{a_k^2}{a_k^2 + a_i^2} L'_{ik},$$

где момент сил L_{ik} определен выше выражением (1.7).

Переходя к лабораторной системе координат по правилу (2.4.6) и усредняя по всем ориентациям, находим дополнительные члены тензора напряжений

⁷ Для величины (1.4), обозначенной нами через γ , используют также другое обозначение: $\gamma = 4\pi(g_1 - g_2)$, которое оказывается менее удобным, так как приводит к появлению добавочных множителей в последующих выражениях (см., например, формулу (5.1.5)).

нительные члены тензора напряжений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n\mu [(1-\lambda)\langle e_i \rangle E_k + 2\lambda \langle e_i e_k e_j \rangle E_j - (1+\lambda)\langle e_k \rangle E_i] + \\ & + \frac{1}{2}nq [(1-\lambda)\langle e_i e_j \rangle E_j E_k + 2\lambda \langle e_i e_k e_j e_s \rangle E_j E_s - \\ & - (1+\lambda)\langle e_k e_j \rangle E_j E_i]. \end{aligned}$$

Прибавляя полученное выражение к выражению (32.7), определяем окончательный вид тензора напряжений⁸

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -p_0 \delta_{ik} + 2\eta_0 \gamma_{ik} + \eta_0 \varphi [-\rho \langle e_j e_s \rangle \gamma_{js} \delta_{ik} + \\ & + 2\alpha \gamma_{ik} + 2\beta D (3 \langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}) + \zeta (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{ik} + \\ & + \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \chi (e_i e_k e_j e_s) \gamma_{js}] + \\ & + \frac{1}{2}n\mu [(1-\lambda)\langle e_i \rangle E_k + 2\lambda \langle e_i e_k e_s \rangle E_s - \\ & - (1+\lambda)\langle e_k \rangle E_i] + \frac{1}{2}nq [(1-\lambda)\langle e_i e_j \rangle E_j E_k + \\ & + 2\lambda \langle e_i e_k e_j e_s \rangle E_j E_s - (1+\lambda)\langle e_k e_j \rangle E_j E_i]. \quad (1.8) \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае среднее значение тензора напряжений выражается через моменты функций распределения первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Постоянные ρ , α , β , ζ и χ по-прежнему определяются выражениями (32.8).

Отметим, что (1.8) может быть получено как частный случай выражения (3.2.10), в котором момент сил определяется (1.7).

Тензор напряжений суспензии, движущейся в электрическом поле, несимметричен. Антисимметричная часть тензора напряжений равна в соответствии с (11.18) среднему с обратным знаком значению момента сил, действующего на единицу объема суспензии:

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = -n \langle L_{ik} \rangle, \quad (1.9)$$

где L_{ik} определяется (1.7).

⁸ Выражение для тензора напряжений было указано впервые в [50].

Отметим, что в случае, когда частицы вырождаются в сферу, выражение для тензора напряжений (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = & -p\delta_{ik} + 2\eta_0 \left(1 + \frac{5}{2}\varphi\right) \gamma_{ik} + \\ & + \frac{1}{2}n\mu (\langle e_i \rangle E_k - \langle e_k \rangle E_i).\end{aligned}\quad (1.10)$$

Таким образом, если шарики не имеют диполей, поле не влияет на движение суспензии, которая в этом случае является обычной вязкой жидкостью с коэффициентом вязкости $\eta = \eta_0 (1 + 5\varphi/2)$. Однако, если шарики обладают постоянными диполями, то тензор напряжений не приводится к простому виду (13.2), а определяется через моменты первого порядка, которые должны быть вычислены как функции напряженности поля и градиентов скорости.

§ 2. Ориентация частиц в поле и в потоке

Тензор напряжений суспензии в поле выражается через моменты функции распределения, которые определяют среднюю ориентацию частиц в потоке и в поле. Моменты функции распределения в рассматриваемом случае могут быть определены так же, как в § 3 главы 3, где был рассмотрен более простой случай.

Момент сторонних сил, действующих на эллипсоид, определяется в этом случае формулой (1.7) и по формуле (24.10) находим скорость вращения эллипсоида в потоке и в поле

$$\Omega_{lm} = \Omega_{lm}^0 - D\kappa (e_l h_m - e_m h_l) - D\sigma e_s h_s (e_l h_m - e_m h_l), \quad (2.1)$$

где Ω_{lm}^0 — определяемая формулой (3.3.1) скорость вращения эллипса в потоке без поля; $\kappa = \mu E/T$; $\sigma = qE^2/\Gamma = (1/3)ab^2\gamma E^2/T$; h_i — единичный вектор в направлении поля.

Используя (2.1) и (25.21), получаем уравнение для функции распределения ориентации осей симметрии осесимметричных эллипсоидов, движущихся в потоке и в электрическом поле:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda (e_s \gamma_{sl} - e_m e_s e_l \gamma_{ms}) \frac{\partial w}{\partial e_l} + \\ + \omega_{ls} e_s \frac{\partial w}{\partial e_l} - 3\lambda e_l e_s \gamma_{ls} w -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}- D\kappa \left[(e_j e_m h_m - h_j) \frac{\partial w}{\partial e_j} + 2e_j h_j w \right] - \\ - D\sigma \left[e_s h_s (e_j e_m h_m - h_j) \frac{\partial w}{\partial e_j} + (3e_l e_s h_l h_s - 1) w \right] = \\ = D \left(e^2 \frac{\partial^2 w}{\partial e_j^2} - 2e_s \frac{\partial w}{\partial e_s} - e_j e_s \frac{\partial^2 w}{\partial e_j \partial e_s} \right).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (33.2) наличием дополнительных членов, которые связаны с полем. Если градиенты скорости равны нулю, то решением уравнения (2.2) является равновесная функция распределения

$$w_0 = C(\kappa, \sigma) \exp(\kappa y + \sigma y^2/2), \quad (2.3)$$

где $C(\kappa, \sigma)$ — постоянная нормировки; $y = \mathbf{e} \cdot \mathbf{h}$.

Можно убедиться, что в стационарном случае при симметричном тензоре градиентов скорости, когда $\omega_{ik} = 0$, уравнение (2.2) имеет простое решение

$$w^* = C(\kappa, \sigma, h_l, \gamma_{js}) \exp \left(\kappa y + \frac{1}{2} \sigma y^2 + \frac{\lambda}{2D} e_j e_s \gamma_{js} \right), \quad (2.4)$$

где $C(\kappa, \sigma, h_l, \gamma_{js})$ — постоянная нормировки, в которую вектор h_j и тензор γ_{js} входят в виде инвариантных комбинаций.

В случае, когда $\omega_{ik} \neq 0$ решение уравнения (2.2) с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости может быть представлено в виде

$$w = w^* \left[1 + \frac{1}{D} g(y) e_l \omega_{ls} h_s \right]. \quad (2.5)$$

В рассматриваемом приближении в выражении (2.4) следует ограничиться также членами первого порядка по градиентам скорости

$$\begin{aligned}w^* = C(\kappa, \sigma) e^{\kappa y + \frac{1}{2} \sigma y^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2D} e_j e_s \gamma_{js} \right) + \\ + C'(\kappa, \sigma) e^{\kappa y + \frac{1}{2} \sigma y^2} \gamma_{js} h_j h_s.\end{aligned}$$

Из требования, чтобы функция была нормирована на единицу, находим значение постоянной C' и функцию распределения записываем в виде

$$w^* = C(\kappa, \sigma) e^{\kappa y + \frac{1}{2} \sigma y^2} \left[1 + \frac{\lambda}{2D} (e_j e_s - \langle e_j e_s \rangle_0) \gamma_{js} \right], \quad (2.6)$$

где $\langle e_j e_s \rangle_0$ — равновесные значения моментов функции распределения второго порядка.

Таким образом, с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости функция распределения имеет вид

$$w = C(\kappa, \sigma) e^{\kappa y + \frac{1}{2} \sigma y^2} \left[1 + \frac{\lambda}{2D} (e_j e_s - \langle e_j e_s \rangle_0) \gamma_{js} + \frac{1}{D} g(y) e_l \omega_{ls} h_s \right]. \quad (2.7)$$

и выражается через одну неизвестную функцию, уравнение для которой следует из уравнения (2.2) после того, как туда подставим выражение (2.5) и сохраним члены первого порядка по градиентам скорости

$$(y^2 - 1) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 4y \frac{\partial g}{\partial y} + (\kappa + \sigma y)(y^2 - 1) \frac{\partial g}{\partial y} + (\kappa + \sigma y) y g + 2g - (\kappa + \sigma y) = 0. \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) при произвольных значениях поля не найдено, поэтому далее в этом и в последующих параграфах будут рассмотрены предельные случаи слабых и сильных полей и найдены асимптотические выражения для моментов функции распределения, которые необходимы для вычисления вязкости супензии в поле.

В общем случае моменты функции распределения определяются уравнениями, которые могут быть получены из уравнения (2.2). Для первых моментов функции распределения имеем

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_k \rangle}{dt} = & -\frac{1}{\tau_1} \langle e_k \rangle + \lambda (\langle e_j \rangle \gamma_{jk} - \langle e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js}) + \\ & + \omega_{kj} \langle e_j \rangle + D\kappa (h_k - \langle e_k e_j \rangle h_j) + \\ & + D\sigma (\langle e_j \rangle h_j h_k - \langle e_k e_j e_s \rangle h_j h_s), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} = & -\frac{1}{\tau_2} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \\ & + \lambda (\langle e_i e_s \rangle \gamma_{sk} + \langle e_k e_s \rangle \gamma_{si}) + \\ & + \omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle - 2\lambda \langle e_i e_k e_j \rangle \gamma_{sj} + \\ & + D\kappa (\langle e_k \rangle h_i - 2 \langle e_i e_k e_j \rangle h_j + \langle e_i \rangle h_k) + \\ & + D\sigma (\langle e_k e_j \rangle h_j h_i - 2 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle h_j h_s + \langle e_i e_j \rangle h_j h_k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k e_l \rangle}{dt} = & -\frac{1}{\tau_3} \left[\langle e_i e_k e_l \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} (\delta_{ik} \langle e_l \rangle + \delta_{il} \langle e_k \rangle + \delta_{kl} \langle e_i \rangle) \right] + \\ & + \lambda (\gamma_{lj} \langle e_i e_k e_j \rangle + \gamma_{ij} \langle e_j e_k e_l \rangle + \gamma_{kj} \langle e_j e_i e_l \rangle) + \\ & + \omega_{lj} \langle e_j e_i e_k \rangle + \omega_{ij} \langle e_j e_k e_l \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i e_l \rangle - \\ & - 3\lambda \gamma_{sj} \langle e_s e_j e_k e_l \rangle + D\kappa (\langle e_i e_k \rangle h_l + \\ & + \langle e_i e_l \rangle h_k + \langle e_k e_l \rangle h_i - 3 \langle e_i e_k e_l e_s \rangle h_s) + \\ & + D\sigma (\langle e_i e_k e_j \rangle h_j h_l + \langle e_i e_l e_j \rangle h_j h_k + \\ & + \langle e_k e_l e_j \rangle h_j h_i - 3 \langle e_i e_k e_l e_s \rangle h_j h_s), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где τ_α определяются формулой (26.9). Аналогичным образом могут быть найдены уравнения для высших моментов функции распределения.

Ситуация в рассматриваемом случае оказывается более сложной, чем в случае течения супензии без поля: в уравнение для скорости изменения моментов первого порядка входят моменты третьего порядка, в уравнение для скорости изменения моментов второго порядка входят моменты первого и четвертого порядков, в уравнение для скорости изменения моментов четвертого порядка — моменты второго и шестого порядков и т. д.

Таким образом, так же как в рассматриваемом ранее случае, система уравнений для моментов оказывается незамкнутой и моменты не могут быть найдены отсюда без каких-либо дополнительных предположений, которые будут введены в § 4.

В заключение укажем общий вид функции распределения и ее моментов для случая слабых полей, когда функцию g , определяемую уравнением (2.8), можно представить в виде разложения по малой напряженности поля. С точностью до членов второго порядка по напряженности поля находим

$$g = \frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{12} (\kappa^2 - 2\sigma) y. \quad (2.12)$$

В рассматриваемом случае слабых полей функцию (2.4) также следует разложить в ряд по малой напряженности поля. Имея в виду разложение равновесной функции распределения (2.3)

$$w_0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \kappa \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{6} X [3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2 - 1] + \dots \right\}, \quad (2.13)$$

где $X = \kappa^2 + \sigma$, из (2.5) находим с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка по напряженности поля нормированную функцию распределения

$$w^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \kappa \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{6} X [3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2 - 1] + \frac{\lambda}{2D} e_j e_s \gamma_{js} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2D} \kappa \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} e_j e_s \gamma_{js} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{60D} X \{[15(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2 - 5] e_j e_s \gamma_{js} - 2h_j h_s \gamma_{js}\} \right\}. \quad (2.14)$$

Теперь можно записать общее выражение для функции распределения с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка по напряженности поля

$$w = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 + \kappa \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{6} X [3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2 - 1] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2D} e_j e_s \gamma_{js} + \frac{\kappa}{2D} e_l \omega_{ls} h_s + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2D} \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} e_j e_s \gamma_{js} + \frac{1}{6D} \left(\frac{5}{2} \kappa^2 + \sigma \right) \mathbf{e} \cdot \mathbf{h} e_l \omega_{ls} h_s + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{60D} X \{[15(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2 - 5] e_j e_s \gamma_{js} - 2h_j h_s \gamma_{js}\} \right\}. \quad (2.15)$$

Выражение, которое получается из найденного разложения в частном случае простого сдвигового движения, когда $v_{21} \neq 0$, и электрического поля, направленного по оси 1, в рассматриваемом приближении совпадает с выражением, определенным для этого случая в [51].

Теперь с помощью разложения (2.15) с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка по напряженности поля находим выражения для моментов

$$\langle e_k \rangle = \frac{1}{3} \kappa h_k + \frac{1}{6D} \kappa \omega_{kj} h_j + \frac{\lambda}{15D} \kappa \gamma_{ks} h_s, \quad (2.16)$$

$$\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{1}{15} X \left(h_i h_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \frac{\lambda}{15D} \gamma_{ik} + \\ + \frac{1}{90D} \left(\frac{5}{2} \kappa^2 + \sigma \right) h_s (h_i \omega_{ks} + h_k \omega_{is}) + \\ + \frac{\lambda}{315} X \{3(h_i h_j \gamma_{jk} + h_k h_j \gamma_{ji}) - 2\gamma_{ik} - 2h_j h_s \gamma_{js} \delta_{ik}\}, \quad (2.17)$$

$$\langle e_k e_i e_n \rangle = \frac{1}{15} \kappa (\delta_{kn} h_i + \delta_{ki} h_n + \delta_{ni} h_k) + \\ + \frac{1}{30D} \kappa (\delta_{kn} \omega_{is} + \delta_{ki} \omega_{ns} + \delta_{ni} \omega_{ks}) h_s + \\ + \frac{\lambda}{105D} \kappa (h_k \gamma_{ni} + h_n \gamma_{ki} + h_i \gamma_{kn} + \delta_{kn} h_j \gamma_{ji} + \\ + \delta_{ki} h_j \gamma_{jn} + \delta_{ni} h_j \gamma_{jk}), \quad (2.18)$$

$$\langle e_i e_k e_n e_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{nl} + \delta_{in} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kn}) + \\ + \frac{1}{315} X \{3(\delta_{nl} h_i h_k + \delta_{lk} h_i h_n + \delta_{li} h_k h_n + \\ + \delta_{ik} h_n h_l + \delta_{in} h_l h_k + \delta_{kn} h_l h_i) - \\ - 2(\delta_{ik} \delta_{nl} + \delta_{in} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kn})\}. \quad (2.19)$$

В другом предельном случае очень сильных полей функцию g можно представить в виде разложения по величинам $1/\kappa$, $1/\sigma$, после чего из уравнения (2.8) можно найти коэффициенты разложения. Формула (2.7) определит функцию распределения в этом случае, после чего могут быть вычислены моменты функции распределения. В следующем параграфе этот случай будет рассмотрен при $\sigma = 0$.

§ 3. Установившаяся ориентация полярных частиц

Формулы, полученные в предыдущем параграфе, относились к общему случаю, когда частица обладала постоянным и индуцированным дипольным моментом. Рассмотрим теперь детальнее среднюю ориентацию частицы эллипсоидальной формы с постоянным диполем, находящейся одновременно в потоке и в поле, и вычислим моменты функции распределения для этого случая.

В равновесной ситуации при $\sigma = 0$ из формулы (2.3) следует для рассматриваемого случая известная функция распределения ориентаций диполей в поле

$$w_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{\sinh \kappa} e^{\kappa y}. \quad (3.1)$$

С помощью этой формулы легко могут быть определены равновесные значения моментов, первые из которых имеют

вид

$$\begin{aligned}\langle e_i \rangle_0 &= L_1 h_i, \\ \langle e_i e_k \rangle_0 &= \frac{1}{2} (1 - L_2) \delta_{ik} + \frac{1}{2} (3L_2 - 1) h_i h_k, \\ \langle e_i e_k e_j \rangle_0 &= \frac{1}{2} (L_1 - L_3) (\delta_{ik} h_j + \delta_{ij} h_k + \delta_{kj} h_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (5L_3 - 3L_1) h_i h_k h_j, \\ \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 &= \\ &= \frac{1}{8} (1 - 2L_2 + L_4) (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{km}) + \\ &+ \frac{1}{8} (-1 + 6L_2 - 5L_4) (h_i h_k \delta_{lm} + h_i h_m \delta_{kl} + \\ &+ h_i h_l \delta_{km} + h_l h_m \delta_{ik} + h_k h_l \delta_{im} + h_k h_m \delta_{il}) + \\ &+ \frac{1}{8} (3 - 30L_2 + 35L_4) h_i h_k h_l h_m, \end{aligned}\quad (3.2)$$

где L_α являются функциями κ и определены следующим образом:

$$L_\alpha = 2\pi C \int_{-1}^1 e^{\kappa y} y^\alpha dy, \quad C = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{\operatorname{sh} \kappa}. \quad (3.3)$$

Из определения видно, что справедливо уравнение

$$L_{\alpha+1} = C \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{L_\alpha}{C} \right),$$

с помощью которого при известном значении $L_0 = 1$ легко находятся соотношения

$$\begin{aligned}L_1 &= \operatorname{cth} \kappa - \frac{1}{\kappa}, \quad L_2 = 1 - \frac{2}{\kappa} L_1, \\ L_3 &= \frac{1}{\kappa} + L_1 - \frac{3}{\kappa} L_2, \quad L_4 = 1 - \frac{4}{\kappa} L_3. \end{aligned}\quad (3.4)$$

Просто устанавливаются также разложения функций L_α . При малых κ с точностью до членов третьего порядка имеем

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{3} \kappa - \frac{1}{45} \kappa^3, \quad L_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{45} \kappa^2, \\ L_3 &= \frac{1}{5} \kappa - \frac{1}{105} \kappa^3, \quad L_4 = \frac{1}{5} + \frac{4}{105} \kappa^2. \end{aligned}\quad (3.5)$$

При больших κ с точностью до членов первого порядка по $1/\kappa$ находим

$$\begin{aligned}L_1 &= 1 - 1/\kappa, \quad L_2 = 1 - 2/\kappa, \\ L_3 &= 1 - 3/\kappa, \quad L_4 = 1 - 4/\kappa. \end{aligned}\quad (3.6)$$

В стационарном случае при малых градиентах скорости с точностью до членов первого порядка функция распределения, как следует из (2.7) при $\sigma = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{\operatorname{sh} \kappa} e^{\kappa v} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\lambda}{2D} (e_j e_s - \langle e_j e_s \rangle_0) \gamma_{js} + \frac{1}{D} g e_l \omega_{ls} h_s \right]. \end{aligned}\quad (3.7)$$

Значения моментов функции распределения (3.7) равны:

$$\begin{aligned}\langle e_k \rangle &= \langle e_k \rangle_0 + \frac{\lambda}{2D} (\langle e_j e_s e_k \rangle_0 - \langle e_k \rangle_0 \langle e_j e_s \rangle_0) \gamma_{js} + \\ &+ \frac{1}{2D} (G_0 - G_2) \omega_{ks} h_s, \\ \langle e_k e_j \rangle &= \langle e_k e_j \rangle_0 + \frac{\lambda}{2D} (\langle e_k e_j e_s \rangle_0 - \langle e_k e_j \rangle_0 \langle e_s \rangle_0) \gamma_{ls} + \\ &+ \frac{1}{2D} (G_1 - G_3) (\omega_{ks} h_j + \omega_{js} h_k) h_s, \end{aligned}\quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}\langle e_k e_j e_m \rangle &= \langle e_k e_j e_m \rangle_0 + \\ &+ \frac{\lambda}{2D} (\langle e_l e_j e_m e_k e_s \rangle_0 - \langle e_k e_j e_m \rangle_0 \langle e_l e_s \rangle_0) \gamma_{ls} + \\ &+ \frac{1}{8D} (G_0 - 2G_2 + G_4) (\delta_{jk} \omega_{ms} + \delta_{jm} \omega_{ks} + \delta_{km} \omega_{js}) h_s + \\ &+ \frac{1}{8D} (-G_0 + 6G_2 - 5G_4) \times \\ &\times (h_j h_k \omega_{ms} + h_j h_m \omega_{ks} + h_k h_m \omega_{js}) h_s. \end{aligned}$$

Постоянные G_α вводятся соотношениями

$$G_\alpha = 2\pi C \int_{-1}^1 e^{\kappa y} y^\alpha dy, \quad C = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{\operatorname{sh} \kappa} \quad (3.9)$$

и удовлетворяют уравнению

$$G_{\alpha+1} = C \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{G_\alpha}{C} \right). \quad (3.10)$$

Теперь вопрос вычисления моментов сводится к вычислению функций G_α .

Далее проще определить моменты (3.8) в предельных случаях слабых и сильных полей. Причем для слабых полей моменты функции распределения вычислены в § 2 и определяются формулами (2.16) — (2.19).

В другом предельном случае очень сильных полей значения моментов функции распределения также могут быть просто найдены. В этом случае решение уравнения (2.8) представим в виде разложения по малой величине $1/\kappa$:

$$g = g_\infty + g_{-1} \frac{1}{\kappa} + g_{-2} \frac{1}{\kappa^2}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в уравнение (2.8), в котором положено $\sigma = 0$, приравнивая члены при одинаковых степенях κ , находим уравнения для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} (y^2 - 1) \frac{dg_\infty}{dy} + yg_\infty - 1 &= 0, \\ (y^2 - 1) \frac{d^2g_\infty}{dy^2} + 4y \frac{dg_\infty}{dy} + \\ + (y^2 - 1) \frac{dg_{-1}}{dy} + yg_{-1} + 2g_\infty &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Последнее уравнение с помощью предыдущего можно записать также в виде

$$\begin{aligned} (y^2 - 1) \frac{d^2g_\infty}{dy^2} + 4y - 4y^2g_\infty + \\ + (y^2 - 1) \frac{dg_{-1}}{dy} + y(y^2 - 1)g_{-1} + 2g_\infty(y^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Воспользуемся уравнениями (3.12) и (3.13) для нахождения определяемых формулой (3.9) величин G_α , которые представляются теперь в соответствии с (3.11) в виде

$$G_\alpha = G_\alpha^\infty + G_\alpha^{-1} \frac{1}{\kappa} + \dots \quad (3.14)$$

Коэффициенты G_α^∞ , G_α^{-1} , ... зависят от κ , и каждый из них может быть представлен в виде разложения по малой величине $1/\kappa$. Опуская верхний индекс, записываем теперь

G_0 в виде разложения и, воспользовавшись соотношением (3.10), выписываем остальные величины:

$$\begin{aligned} G_0 &= a_0 + a_1 \frac{1}{\kappa} + a_2 \frac{1}{\kappa^2} + a_3 \frac{1}{\kappa^3} + \dots, \\ G_1 &= a_0 + (a_1 - a_0) \frac{1}{\kappa} + (a_2 - 2a_1) \frac{1}{\kappa^2} + \\ + (a_3 - 3a_2) \frac{1}{\kappa^3} + \dots, \\ G_2 &= a_0 + (a_1 - 2a_0) \frac{1}{\kappa} + (a_2 - 4a_1 + 2a_0) \frac{1}{\kappa^2} + \\ + (a_3 - 6a_2 + 6a_1) \frac{1}{\kappa^3} + \dots, \\ G_3 &= a_0 + (a_1 - 3a_0) \frac{1}{\kappa} + (a_2 - 6a_1 + 6a_0) \frac{1}{\kappa^2} + \\ + (a_3 - 9a_2 + 18a_1 - 6a_0) \frac{1}{\kappa^3} + \dots, \\ G_4 &= a_0 + (a_1 - 4a_0) \frac{1}{\kappa} + (a_2 - 8a_1 + 12a_0) \frac{1}{\kappa^2} + \\ + (a_3 - 12a_2 + 36a_1 - 24a_0) \frac{1}{\kappa^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для того чтобы определить уравнения для искомых коэффициентов, умножаем уравнения (3.12) и (3.13) на Ce^{xy} и интегрируем, после чего находим

$$\kappa G_2^\infty + G_1^\infty - \kappa G_0^\infty + 1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2(G_4^\infty - 2G_2^\infty + G_0^\infty) + 8\kappa(G_3^\infty - G_1^\infty) + 10G_2^\infty - 6G_0^\infty - \\ - \kappa(G_4^{-1} - 2G_2^{-1} + G_0^{-1}) - 3(G_3^{-1} - G_1^{-1}) + 4L_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя разложения (3.15) в уравнения (3.16) и (3.17) и приравнивая члены одного порядка, находим $a_0^\infty = 1$, $a_1^\infty = 1/3$, $a_2^\infty = 4/15$, $a_0^{-1} = -2/3$. Теперь по (3.14) и (3.15) можно записать разложения функций G_α в случае сильных полей и определить по (3.8) моменты функции распределения. С точностью до членов первого порядка по малой величине $1/\kappa$ из выражений (3.8), используя также формулы (3.6), находим

$$\langle e_k \rangle = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) h_k + \frac{\lambda}{D\kappa} (h_j \delta_{jk} - h_k h_s h_j) \gamma_{js} + \frac{1}{D\kappa} \omega_{ks} h_s, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \langle e_k e_j \rangle &= \frac{1}{\kappa} \delta_{kj} + \left(1 - \frac{3}{\kappa}\right) h_j h_k + \\ &+ \frac{\lambda}{D\kappa} (\gamma_{js} h_s h_k + \gamma_{ks} h_s h_j - 2h_j h_k h_s \gamma_{ls}) + \\ &+ \frac{1}{D\kappa} (\omega_{ks} h_j + \omega_{js} h_k) h_s. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Эти выражения вместе с выражениями (2.16) — (2.19) определяют значения моментов функции распределения в стационарном случае, соответственно в сильных и слабых полях.

§ 4. Кинетика ориентации полярных частиц

В предыдущих параграфах были вычислены моменты функции распределения в установившемся случае, когда градиенты скорости не зависят от времени. Здесь рассмотрим супензию дипольных частиц в неустановившихся процессах и запишем релаксационные уравнения для моментов функции распределения. Рассмотрим простой случай, когда частицы имеют сферическую форму.

В рассматриваемом случае уравнения для моментов функции распределения следуют из уравнений (2.9) — (2.11) при $\lambda = 0$ и имеют вид

$$\frac{d \langle e_k \rangle}{dt} = -2D \langle e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j \rangle + D\kappa (h_k - \langle e_k e_j \rangle h_j), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} &= -6D \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \\ &+ \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle + D\kappa (\langle e_i \rangle h_k + \langle e_k \rangle h_i - 2 \langle e_i e_k \rangle h_j), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k e_l \rangle}{dt} &= -12D \left[\langle e_i e_k e_l \rangle - \frac{1}{6} (\delta_{ik} \langle e_l \rangle + \right. \\ &\left. + \delta_{il} \langle e_k \rangle + \delta_{kl} \langle e_i \rangle) \right] + \omega_{ij} \langle e_j e_k e_l \rangle + \\ &+ \omega_{kj} \langle e_j e_i e_l \rangle + \omega_{lj} \langle e_j e_i e_k \rangle + D\kappa (\langle e_i e_k \rangle h_l + \\ &+ \langle e_i e_l \rangle h_k + \langle e_k e_l \rangle h_i - 3 \langle e_i e_k e_l \rangle h_s). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В релаксационное уравнение для моментов первого порядка входят моменты второго порядка, которые в свою очередь оказываются связанными с моментами третьего порядка и т. д. Форма релаксационных уравнений позволяет найти решение уравнений в виде разложения по малым градиентам скорости и по малой напряженности

поля. Интересен, однако, случай, когда напряженность поля не мала. Каким же образом оборвать цепочку уравнений в случае произвольного поля? Воспользуемся для этого методом, предложенным М. А. Леонтьевичем [52] и использованным в работе [53] для рассматриваемого случая.

Предполагаем, что для каждого неравновесного значения функции распределения можно определить некоторое фиктивное поле $E_j^* = E_j + \delta E_j$ такое, что в этом поле в данный момент неравновесная функция распределения в действительном поле совпадает с равновесной функцией распределения в фиктивном поле и определяется выражением

$$w = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa^*}{\sinh \kappa^*} \exp \left(\frac{\mu}{T} E_j^* e_j \right). \quad (4.4)$$

Тогда неравновесные моменты функции распределения, которые совпадают с равновесными моментами в фиктивном поле, могут быть просто вычислены по формулам (3.2), определенным через фиктивное поле.

Например, для моментов первого порядка, предполагая, что отклонение от равновесия во всех случаях является малым, т. е. $\delta E/E \ll 1$, и вводя обозначение для разности между неравновесным и равновесным значениями первого момента в заданном поле $\xi_k = \langle e_k \rangle - \langle e_k \rangle_0$, находим

$$\xi_k = \frac{L_1}{\kappa} \delta\kappa_k + \left(\frac{\partial L_1}{\partial \kappa} - \frac{L_1}{\kappa} \right) h_k h_j \delta\kappa_j, \quad (4.5)$$

где $\delta\kappa = (\mu/T)\delta E$.

Теперь с помощью формул (3.2) и (3.4) находим соотношение между значениями моментов в фиктивном поле

$$\kappa_k^* - \langle e_k e_i \rangle \kappa_i^* = 2 \langle e_k \rangle, \quad (4.6)$$

откуда непосредственно следует выражение для комбинации, входящей в уравнение (4.1):

$$\kappa_k - \langle e_k e_i \rangle \kappa_i = 2 \langle e_k \rangle + \langle e_k e_i \rangle_0 \delta\kappa_i - \delta\kappa_k. \quad (4.7)$$

Определим теперь значение фиктивной добавки $\delta\kappa_i$ из уравнения (4.5), вычислим (4.7) и подставим в уравнение (4.1). Окончательно находим релаксационное уравнение для момента первого порядка

$$\frac{d \langle e_k \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau^\perp} (\xi_k - h_k h_j \xi_j) - \frac{1}{\tau^\parallel} h_k h_j \xi_j + \omega_{kj} \langle e_j \rangle \quad (4.8)$$

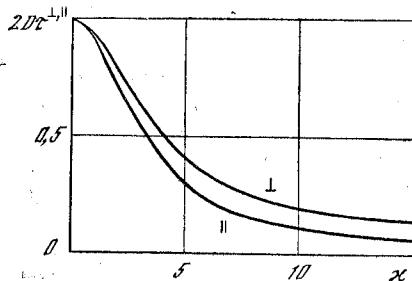


Рис. 7. Зависимость времени релаксации ориентации полярных частиц в поле от безразмерной напряженности поля

с временами релаксации, указанными в работе [53]:

$$\tau^\perp = \frac{L_1}{D(\kappa - L_1)}, \quad \tau^{\parallel} = \frac{\kappa}{2DL_1} \frac{\partial L_1}{\partial \kappa}. \quad (4.9)$$

Так как $\xi_k - h_k h_j \xi_j = [\mathbf{h}[\xi \mathbf{h}]]_k$, то τ^\perp есть время релаксации составляющей момента, перпендикулярной направлению поля, а τ^{\parallel} — время релаксации составляющей момента, параллельной направлению поля. При этом $\tau^{\parallel} < \tau^\perp$, если $\kappa \neq 0$.

Используя формулы (3.5) и (3.6), находим, что при малых и больших значениях поля первые члены разложения времени релаксации имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \tau^\perp &= \frac{1}{2D} \left(1 - \frac{1}{10} \kappa^2 \right), \quad \tau^{\parallel} = \frac{1}{2D} \left(1 - \frac{2}{15} \kappa^2 \right), \\ \tau^\perp &= 1/D\kappa, \quad \tau^{\parallel} = 1/2D\kappa. \end{aligned}$$

Значения времен релаксации при произвольных значениях поля приведены на рис. 7.

Отметим, что в рассматриваемом линейном приближении на значения времен релаксации не влияют градиенты скорости, поскольку $v_{jj} = 0$.

Воспользовавшись соотношением $dh_l/dt = (\delta_{lj} - h_j h_l) d\kappa_j/d\kappa$, перепишем теперь уравнение (4.8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= -\frac{1}{\tau^\perp} (\xi_k - h_k h_j \xi_j) - \frac{1}{\tau^{\parallel}} h_k h_j \xi_j + \omega_{kj} \langle e_j \rangle - \\ &- \left[\left(\kappa \frac{\partial L_1}{\partial \kappa} - L_1 \right) h_k h_j + L_1 \delta_{kj} \right] \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa_j}{dt}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Рассмотрим далее уравнение (4.10) в линейном по градиентам скорости приближении. Для этого в слагающем, включающем градиент скорости ω_{ij} , заменим моменты

их равновесными значениями. Определим теперь значения моментов, для чего разделим вектор ξ на две составляющие: параллельную и перпендикулярную направлению поля.

После умножения (4.10) на h_k получаем

$$\frac{d(\xi_k h_k)}{dt} = -\frac{1}{\tau^\perp} \xi_k h_k + \left(\xi_j - \xi_k h_k h_j - \kappa \frac{\partial L_1}{\partial \kappa} h_j \right) \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa_j}{dt}. \quad (4.11)$$

Найдем теперь еще два уравнения: одно — при умножении (4.10) на h_l , второе — при перестановке индексов в полученном уравнении. После вычитания одного полученного уравнения из другого находим

$$\begin{aligned} \frac{d(h_l \xi_k - h_k \xi_l)}{dt} &= -\frac{1}{\tau^\perp} (h_l \xi_k - h_k \xi_l) + \\ &+ L_1 (\omega_{ki} h_i h_l - \omega_{li} h_i h_k) + \frac{1}{\kappa} \left(\xi_k \frac{d\kappa_l}{dt} - \xi_l \frac{d\kappa_k}{dt} \right) - \\ &- (h_l \xi_k - h_k \xi_l) h_j \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa_j}{dt} - \frac{L_1}{\kappa} \left(h_l \frac{d\kappa_k}{dt} - h_k \frac{d\kappa_l}{dt} \right). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Из (4.11) следует, что продольную составляющую ξ возмущает только изменение поля, но не градиент скорости. Поперечную составляющую, как видно из (4.12), возмущает и то, и другое.

Уравнения (4.11) и (4.12) являются общими уравнениями, определяющими в линейном по градиентам скорости приближении моменты функции распределения первого порядка. Рассмотрим далее некоторые простые примеры, в которых моменты легко находятся.

В случае, когда поле не зависит от времени, из (4.11) следует, что в рассматриваемом приближении $h_l \xi_j = 0$. Рассматривая далее однородное движение, умножим (4.12) на $\exp(t'/\tau^\perp)$ и проинтегрируем по t' от 0 до $-\infty$. После интегрирования по частям, введения новой переменной $s = t - t'$ и умножения на h_l находим

$$\langle e_k \rangle = \langle e_k \rangle_0 + L_1 \int_0^\infty e^{-s/\tau^\perp} \omega_{kj} (t - s) h_j ds. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) описывает изменение средней ориентации частиц во времени при изменении градиента скорости. Рассматривая простой случай осциллирующего

сдвигового движения, при котором $\omega_{kj} \sim \exp(-i\omega t)$, из формулы (4.13) находим

$$\langle e_k \rangle = \langle e_k \rangle_0 + L_1 \tau^\perp \omega_{kj} h_j / (1 - i\omega \tau^\perp). \quad (4.14)$$

В стационарном случае из (4.14), учитывая определение времени релаксации (4.9), находим

$$\langle e_k \rangle = \langle e_k \rangle_0 + \frac{L_1^2}{D(x - L_1)} \omega_{kj} h_j. \quad (4.15)$$

Это выражение при малых и больших значениях поля совпадает с предельными значениями (2.16) и (3.18).

Таким образом, рассматриваемое приближение определяет интерполяционную формулу (4.15), справедливую для всех значений поля.

В случае, когда поле не зависит от координат и меняет только направление, но не величину, уравнения (4.11) и (4.12) записываются следующим образом:

$$\frac{d(\xi_k h_k)}{dt} = -\frac{1}{\tau^\parallel} \xi_k h_k + \xi_k \dot{h}_k, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(h_l \xi_k - h_k \xi_l)}{dt} &= -\frac{1}{\tau^\perp} (h_l \xi_k - h_k \xi_l) + \\ &+ (\dot{h}_l \xi_k - \dot{h}_k \xi_l) - L_1 (h_l \dot{h}_k - h_k \dot{h}_l). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Эти уравнения пригодны для того, чтобы рассмотреть интересный случай — суспензию частиц во вращающемся с частотой ω поле, когда

$$h_1 = \cos \omega t, \quad h_2 = \sin \omega t, \quad h_3 = 0. \quad (4.18)$$

В этом случае из уравнения (4.8) следует, что

$$\langle e_3 \rangle = \langle e_3 \rangle_0 = 0. \quad (4.19)$$

Предполагая, что

$$\langle e_1 \rangle = A \cos(\omega t - \alpha), \quad \langle e_2 \rangle = A \sin(\omega t - \alpha), \quad (4.20)$$

где α — независящий от времени угол между направлением поля и средней ориентацией частиц, определяем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x - L_1) \cos \omega t + y \sin \omega t, \\ \xi_2 &= -y \cos \omega t + (x - L_1) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $x = A \cos \alpha$, $y = A \sin \alpha$.

Находим вначале, используя формулы (4.18) и (4.21), выражения для величин, входящих в уравнения (4.16) и (4.17):

$$\begin{aligned} \xi_k h_k &= x - L_1, & \xi_k \dot{h}_k &= -\omega y, & h_2 \xi_1 - h_1 \xi_2 &= y, \\ h_2 \xi_1 - h_1 \xi_2 &= \omega(x - L_1), & h_2 \dot{h}_1 - h_1 \dot{h}_2 &= -\omega. \end{aligned}$$

Теперь из (4.16) и (4.17) получаем систему уравнений

$$\frac{1}{\tau^\parallel} x + \omega y = \frac{1}{\tau^\parallel} L_1, \quad -\omega x + \frac{1}{\tau^\perp} y = 0, \quad (4.22)$$

решение которой имеет вид

$$x = \frac{1}{1 + \tau^\perp \tau^\parallel \omega^2} L_1, \quad y = \frac{\omega \tau^\perp}{1 + \tau^\perp \tau^\parallel \omega^2} L_1. \quad (4.23)$$

Теперь по (4.20) и (4.21) могут быть определены моменты первого порядка и найден угол между направлением поля и средней ориентацией диполей, который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \tau^\perp \omega. \quad (4.24)$$

Напомним, что время релаксации определяется выражением (4.9) и убывает с увеличением поля. Результат (4.24) существенно отличается от соответствующего результата, полученного в [54] в пренебрежении броуновским движением частицы.

При вычислении моментов высших порядков можно воспользоваться также тем, что времена релаксации уменьшаются с увеличением номера момента

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots \quad (4.25)$$

Поэтому для любого движения можно найти такой номер, при котором значение соответствующего момента можно принять равным его равновесному значению в заданном поле. Тогда значения моментов низких порядков могут быть вычислены.

Самое простое приближение может быть получено, если значение момента второго порядка положим равным его равновесному значению в поле. Тогда по (3.2) и (3.4) находим

$$\langle e_k e_i \rangle_0 h_i = h_k - (2/\kappa) \langle e_k \rangle_0$$

и из уравнения (4.1) находим релаксационное уравнение

в первом приближении

$$d\langle e_k \rangle / dt = -(\tau_1)^{-1} (\langle e_k \rangle - \langle e_k \rangle_0) + \omega_{kj} \langle e_j \rangle. \quad (4.26)$$

Пусть теперь задан и имеет равновесное значение момент третьего порядка. С помощью соотношений (3.2) и (3.4) находим

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k e_j \rangle_0 h_j &= -\frac{3}{\kappa} \langle e_i e_k \rangle_0 + \\ &+ \frac{1}{2} (\langle e_i \rangle_0 h_k + \langle e_k \rangle_0 h_i) + \frac{1}{\kappa} \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (4.2) можно с помощью полученного соотношения записать в виде

$$\begin{aligned} d\langle e_i e_k \rangle / dt &= -6D (\langle e_i e_k \rangle - \langle e_i e_k \rangle_0) + \omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \\ &+ \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle + D\kappa (\xi_i h_k + \xi_k h_i), \end{aligned}$$

где $\xi_i = \langle e_i \rangle - \langle e_i \rangle_0$. Из последнего уравнения находим стационарное значение момента второго порядка

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k \rangle &= \langle e_i e_k \rangle_0 + \frac{1}{6D} (\omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle) + \\ &+ \frac{1}{6} \kappa (\xi_i h_k + \xi_k h_i). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Теперь с помощью (4.22) записываем по (4.1) релаксационное уравнение для первого момента во втором приближении

$$\begin{aligned} \frac{d\langle e_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau^\perp} (\xi_k - h_k h_j \xi_j) - \frac{1}{\tau^\parallel} h_k h_j \xi_j + \\ &+ \omega_{kj} \langle e_j \rangle - \frac{1}{6} \kappa (\omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle) h_i, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где вместо определений (4.9) введены обозначения для времен релаксации

$$\tau^\perp = 6/D (12 + \kappa^2), \quad \tau^\parallel = 3/D (6 + \kappa^2). \quad (4.29)$$

Учитывая, что в силу соотношений (3.2) и (3.4) выполняются соотношения

$$\langle e_k e_i \rangle_0 h_i = h_k - (2/\kappa) \langle e_k \rangle_0,$$

$$\omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle_0 h_i = (1/\kappa) \omega_{ik} \langle e_i \rangle_0,$$

находим вместо (4.8) уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\langle e_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau^\perp} (\xi_k - h_k h_j \xi_j) - \\ &- \frac{1}{\tau^\parallel} h_k h_j \xi_j + \frac{1}{6} (9L_1 - \kappa) \omega_{kj} h_j. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Уравнения (4.29) и (4.30) при малых значениях поля близки к уравнениям (4.9) и (4.8).

По-видимому, таким образом можно определить релаксационное уравнение и времена релаксации, справедливые для достаточно больших значений поля, если полагать равновесным достаточно высокий момент функции распределения.

§ 5. Вязкость суспензии в поле

Вычисленные в предыдущих параграфах моменты функции распределения позволяют теперь по формуле (1.8) определить напряжения, возникающие при течении суспензии, которая оказывается, вообще говоря, пелинейной вязкоупругой жидкостью с бесконечным числом времен релаксации. В случае, когда частицы достаточно малы, времена релаксации также оказываются малыми, и при этом можно пренебречь временными эффектами и рассмотреть стационарный случай. В этом случае тензор напряжений (1.8) может быть преобразован к более удобному для вычислений виду. Воспользуемся уравнением (2.10), которое для стационарного случая принимает вид

$$\begin{aligned} &-6D \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \lambda (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{jk} + \\ &- \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle - \\ &- 2\lambda \langle e_i e_k e_s e_j \rangle \gamma_{sj} + D \frac{\mu}{T} (E_i \langle e_k \rangle + E_k \langle e_i \rangle - \\ &- 2E_j \langle e_j e_i e_k \rangle) + D \frac{q}{T} (E_i E_j \langle e_j e_k \rangle + \\ &+ E_k E_j \langle e_j e_i \rangle - 2E_s E_j \langle e_j e_s e_i e_k \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Умножая это соотношение на $\lambda T/2D = \varphi \eta_0 \beta$ и прибавляя к тензору напряжений (1.8), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = & - (p_0 + \eta_0 \varphi \langle e_j e_s \rangle \gamma_{js}) \delta_{ik} + 2\eta_0 (1 + \varphi \alpha) \gamma_{ik} + \\ & + \eta_0 \varphi (\zeta + \beta \lambda) (\langle e_i e_j \rangle \gamma_{jk} + \langle e_k e_j \rangle \gamma_{ji}) + \\ & + \eta_0 \varphi (\omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle) + \\ & + \eta_0 \varphi (\chi - 2\lambda \beta) \langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js} + \\ & + \frac{1}{2} n \mu (\langle e_i \rangle E_k - \langle e_k \rangle E_i) + \\ & \frac{1}{2} n q (\langle e_i e_j \rangle E_j E_k - \langle e_k e_j \rangle E_j E_i).\end{aligned}\quad (5.2)$$

Для вычисления тензора напряжений нужно знать моменты первого, второго и четвертого порядков, которые являются функциями градиента скорости. После подстановки выражений для указанных моментов, тензор напряжений представляется в виде разложения по градиентам скорости и в линейном приближении имеет вид

$$\sigma_{ik} = - p_0 \delta_{ik} + \eta_{ikjs} v_{js}, \quad (5.3)$$

где η_{ikjs} — анизотропная вязкость. Рассмотрим далее коэффициент вязкости в предельных случаях слабых и сильных полей, не занимаясь выписыванием общих соотношений.

Используя выражения для моментов функций распределения (2.16), (2.17) и (2.19), записываем тензор напряжений с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка по напряженности поля

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = & - (p_0 - \eta_0 \varphi X \xi h_j h_s \gamma_{js}) \delta_{ik} + 2\eta_0 \gamma_{ik} + \\ & + \eta_0 \varphi \left\{ 2v_0 \gamma_{ik} - Xk [3(h_i h_j \gamma_{jk} + h_k h_j \gamma_{ji}) - 2\gamma_{ik}] + \right. \\ & + \frac{1}{15} X \beta (\omega_{kj} h_i h_j + \omega_{ij} h_k h_j) + \frac{1}{15} X \beta (h_k h_j \gamma_{ij} - \\ & \left. - h_i h_j \gamma_{kj}) + \frac{1}{2} \kappa^2 \delta (\omega_{ij} h_j h_k - \omega_{kj} h_j h_i) \right\},\end{aligned}\quad (5.4)$$

где v_0 определяется формулой (3.4.10);

$$\begin{aligned}\xi = & - \frac{1}{15} \rho + \frac{1}{105} \chi + \frac{2}{105} \lambda \beta, \\ k = & - \frac{1}{45} \zeta - \frac{2}{315} \chi - \frac{1}{105} \lambda \beta.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Значения ξ и k приведены в табл. 4.

В случае сильных полей, воспользовавшись выражениями для моментов (3.2), (3.18) и (3.19), из выражения (5.2) находим не зависящее от напряженности поля предельное значение тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = & - (p_0 + \eta_0 \varphi h_j h_s \gamma_{js}) \delta_{ik} + 2\eta_0 \gamma_{ik} + \\ & + \eta_0 \varphi [2\alpha \gamma_{ik} + (\zeta + \beta \lambda) (h_i h_j \gamma_{jk} + h_k h_j \gamma_{ji}) + \\ & + \beta (\omega_{ij} h_j h_k + \omega_{kj} h_j h_i) - (2\lambda \beta - \chi) h_i h_k h_s \gamma_{js} + \\ & + \beta (h_k h_j \gamma_{ji} - h_i h_j \gamma_{jk}) + 3\delta (\omega_{is} h_s h_k - \omega_{ks} h_s h_i)].\end{aligned}\quad (5.6)$$

Значения коэффициентов $\zeta + \beta \lambda$ и $2\lambda \beta - \chi$ приведены в табл. 5.

Рассматривая простое сдвиговое движение ($v_{12} \neq 0$) с произвольным направлением напряженности поля, из (5.4) и (5.6) находим выражение для напряжения сдвига и определяем коэффициент вязкости как коэффициент пропорциональности между градиентом сдвига и напряжением сдвига в слабых и сильных полях соответственно

$$\begin{aligned}\eta = & \eta_0 + \eta_0 \varphi \left\{ v_0 - \frac{1}{2} k X [3(h_1^2 + h_2^2) - 2] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{15} X \beta (h_2^2 - h_1^2) + \frac{1}{4} \kappa^2 \delta (h_1^2 + h_2^2) \right\},\end{aligned}\quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}\eta = & \eta_0 + \eta_0 \varphi \left[a + \frac{1}{2} (\zeta + \beta \lambda + 3\delta) (h_1^2 + h_2^2) + \right. \\ & \left. + \beta (h_2^2 - h_1^2) + (\chi - 2\lambda \beta) h_1^2 h_2^2 \right].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Выражения (5.7) и (5.8) определяют коэффициент вязкости суспензии как функцию формы частиц, величины и направления поля. Вводя углы, определяющие направление поля, соотношениями

$h_1 = \cos \psi \sin \gamma$, $h_2 = \sin \psi \sin \gamma$, $h_3 = \cos \gamma$, (5.9) записываем выражение (при $q = 0$) для характеристической вязкости $\nu = (\eta - \eta_0)/\eta_0 \varphi$ в слабых и сильных полях соответственно

$$\nu = v_0 + \left[k + \left(-\frac{3}{2} k + \frac{1}{4} \delta - \frac{1}{15} \beta \cos 2\psi \right) \sin^2 \gamma \right] \kappa^2,\quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}\nu_\infty = & a + \left[\frac{1}{2} (\zeta + \beta \lambda + 3\delta) - \beta \cos 2\psi \right] \sin^2 \gamma + \\ & + \frac{1}{4} (\chi - 2\lambda \beta) \sin 2\psi \sin^4 \gamma.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Таблица 4

Характеристическая вязкость суспензии в слабом поле

a/b	ξ	$k = k(0, \psi)$	$k(\pi/2, 0)$	$k(\pi/2, \pi/4)$	$k(\pi/2, \pi/2)$
0,04	4,63	1,22	48,7	40,4	1,54
0,045	3,40	0,824	12,5	6,75	1,02
0,02	2,26	0,624	9,24	5,00	0,755
0,03	1,52	0,419	6,16	3,33	0,504
0,04	1,15	0,318	4,62	2,50	0,378
0,05	0,927	0,257	3,70	2,00	0,306
0,07	0,670	0,187	2,64	1,43	0,224
0,1	0,475	0,135	1,85	1,04	0,465
0,15	0,319	0,093	1,24	0,683	0,425
0,2	0,238	0,072	0,938	0,524	0,411
0,3	0,150	0,049	0,637	0,372	0,407
0,4	0,101	0,037	0,490	0,304	0,417
0,5	0,068	0,028	0,405	0,269	0,433
0,7	0,028	0,015	0,312	0,243	0,474
1,0	0,000	0,000	0,250	0,250	0,250
1,5	-0,013	-0,024	0,218	0,310	0,402
2	-0,013	-0,048	0,220	0,400	0,581
3	-0,006	-0,104	0,263	0,637	1,01
4	0,000	-0,169	0,334	0,933	1,53
5	0,006	-0,243	0,425	1,28	2,14
7	0,016	-0,417	0,652	2,12	3,59
10	0,038	-0,739	1,09	3,74	6,33
15	0,098	-1,43	2,05	7,18	12,3
20	0,193	-2,30	3,28	11,6	19,9
30	0,488	-4,54	6,49	23,2	39,9
40	0,921	-7,44	10,7	38,2	65,8
50	1,49	-11,0	15,7	56,7	97,6
70	3,02	-19,9	28,7	104	178
100	6,29	-38,1	55,1	199	343

В случае слабых полей характеристическая вязкость (5.10) имеет вид $v = v_0 + k(\gamma, \psi)\psi^2$. Значения коэффициента $k(\gamma, \psi)$ для некоторых значений углов приведены в табл. 4.

Вязкость суспензии в слабых полях рассматривалась в [55].

Таблица 5

Характеристическая вязкость суспензии в сильном поле

a/b	$\zeta + \beta\lambda$	$2\lambda\beta - \chi$	$v_\infty(0, \psi)$	$v_\infty(\pi/2, 0)$	$v_\infty(\pi/2, \pi/4)$	$v_\infty(\pi/2, \pi/2)$
0,04	-41,9	46,4	86,4	259	118	1,02
0,045	-28,2	30,5	58,4	173	79,3	1,04
0,02	-22,4	20,6	43,9	128	59,6	1,04
0,03	-15,0	13,5	29,7	85,9	40,4	1,07
0,04	-11,4	9,97	22,7	64,7	30,4	1,09
0,05	-9,32	7,85	18,4	52,0	24,6	1,42
0,07	-6,87	5,42	13,6	37,5	18,0	1,47
0,1	-5,03	3,60	9,96	26,6	13,0	1,24
0,15	-3,57	2,49	7,44	18,4	9,20	1,37
0,2	-2,81	1,48	5,74	13,9	7,33	1,50
0,3	-2,00	0,795	4,35	9,71	5,54	1,76
0,4	-1,52	0,451	3,67	7,64	4,73	2,04
0,5	-1,18	0,261	3,27	6,44	4,31	2,33
0,7	-0,662	0,073	2,82	5,02	3,97	2,96
4,0	0,00	0,000	2,50	4,00	4,00	4,00
4,5	1,09	0,122	2,27	3,23	4,58	5,99
2	2,29	0,417	2,17	2,86	5,47	8,28
3	5,07	1,38	2,09	2,54	7,79	13,8
4	8,39	2,78	2,05	2,35	10,6	20,3
5	12,2	4,57	2,04	2,26	14,0	28,0
7	21,4	9,28	2,02	2,46	21,9	46,2
10	38,7	19,1	2,01	2,40	36,6	81,0
15	76,3	42,2	2,00	2,05	68,4	156
20	124	73,4	2,00	2,03	109	252
30	250	159	2,00	2,02	213	503
40	443	275	2,00	2,01	347	829
50	613	419	2,00	2,01	511	1229
70	1122	795	2,00	2,00	926	2248
100	2162	1572	2,00	2,00	1771	4326

В табл. 5 приведены значения предельной характеристической вязкости $v_\infty = v_\infty(\gamma, \psi)$ суспензии в сильном поле для тех же значений углов. Указанные значения практически совпадают со значениями, вычисленными другим способом в [56] для суспензии невращающихся частиц.

Выражения для предельных значений характеристической вязкости (5.10) и (5.11) определяются сравнительно просто, однако когда поле имеет промежуточную величину, расчеты оказываются более сложными и требуют вычислительной техники. Такие расчеты были выполнены для супензии эллипсоидов с индуцированными диполями в [57]. Для промежуточных значений поля могут быть указаны также простые интерполяционные формулы, которые для супензии дипольных эллипсоидальных частиц были определены в [58].

Обсудим подробнее зависимость вязкости супензии от напряженности поля на наиболее простом примере супензии дипольных сферических частиц. Для этого случая были предложены интерполяционные формулы [59, 60] и были получены точные численные результаты в большом интервале изменения параметров [61].

Отметим прежде всего, что выражение для вязкости супензии сферических частиц в случае слабых полей может быть получено с большой точностью. Для этого исходим из выражения (1.10) для тензора напряжений супензии шариков в поле и уравнения для скорости изменения момента функции распределения первого порядка (4.1).

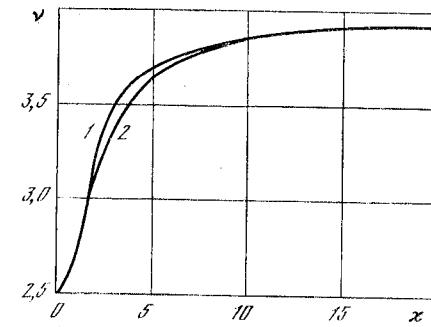
В стационарном случае из уравнения (4.1) следует, что моменты первого порядка выражаются через моменты второго порядка. С точностью до членов первого порядка по градиентам скорости

$$\langle e_i \rangle = (\kappa/4D)(2D\delta_{is} + \omega_{is})(h_s - \langle e_s e_j \rangle h_j). \quad (5.12)$$

Таким образом, тензор напряжений (1.10) может быть выражен через моменты второго порядка. При этом получение выражение при заданной точности моментов второго порядка по напряженности поля определяет напряжение с большой точностью. Например, зная по (2.17) моменты второго порядка с точностью до членов второго порядка по E , в стационарном случае определяем напряжение с точностью до членов четвертого порядка.

Рассмотрим простое сдвиговое движение, когда $v_{12} \neq 0$, при произвольно направленном поле с компонентами напряженности поля (5.9) и определяем выражение для эффективного коэффициента сдвиговой вязкости

Рис. 8. Зависимость характеристической вязкости супензии дипольных сферических частиц в поле от безразмерной напряженности поля



супензии шариков в поле. С указанной точностью

$$\eta = \eta_0 + \eta_0 \Phi \left[\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{4} \kappa^2 - \frac{3}{80} \kappa^4 \right) \sin^2 \gamma \right]. \quad (5.13)$$

Теперь обратимся к известной [53, 60] интерполяционной формуле для вязкости, которая следует из выражения (1.10), если для моментов использовать выражение (4.15), справедливое в случае малых отклонений от равновесия:

$$\eta = \eta_0 + \eta_0 \Phi \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \frac{\kappa L_1^2}{\kappa - L_1} \sin^2 \gamma \right). \quad (5.14)$$

При малых напряженностях поля разложение интерполяционной формулы (5.14) имеет вид

$$\eta = \eta_0 + \eta_0 \Phi \left[\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{4} \kappa^2 - \frac{1}{24} \kappa^4 \right) \sin^2 \gamma \right] \quad (5.15)$$

и совпадает со значением, определяемым формулой (5.13), с точностью до членов второго порядка по κ .

Для оценки точности интерполяционного приближения в области больших значений напряженности поля сравним значения коэффициента вязкости супензии сферических дипольных частиц, определенные в [61] численно (кривая 1, рис. 8), со значениями, вычисленными по формуле (5.14) (кривая 2). Значения характеристической вязкости приведены на рис. 8 при $\gamma = \pi/2$. Наибольшее расхождение наблюдается в области значений κ между 2 и 10, но с практической точки зрения результаты не столь уж отличаются, так что могут быть использованы предложенные интерполяционные формулы не только

в случае сферических частиц, но и в случае суспензии эллипсоидальных частиц.

В случае очень сильных полей все приведенные формулы определяют предельное значение вязкости суспензии сферических частиц

$$\eta_\infty = \eta_0 + \eta_0 \Phi \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \gamma \right). \quad (5.16)$$

Таким образом, приведенные здесь результаты показывают, что величина и направление поля существенно влияют на значение вязкости. В зависимости от направления поля и формы частиц коэффициент вязкости может быть меньше или больше начального значения вязкости. Изменение коэффициента вязкости в поле связано с двумя факторами. Первый — заторможенность вращения частиц в поле — всегда приводит к увеличению коэффициента вязкости, а второй — ориентирующее влияние поля на взвешенные частицы — в зависимости от направления поля уменьшает или увеличивает коэффициент вязкости. Например, в поле, приложенном вдоль направления течения, вязкость суспензии вытянутых эллипсоидов уменьшается, а вязкость суспензии сплюснутых эллипсоидов увеличивается.

Вернемся в заключение к определяемому выражением (5.2) тензору напряжений, который, вообще говоря, нелиней по градиентам скорости и в линейном приближении определяет коэффициент вязкости суспензии в поле, рассмотренный в этом параграфе. При больших градиентах скорости вязкость суспензии в поле, так же как и вязкость суспензии без поля (см. § 5 главы 3) зависит от градиента скорости. Кроме того, при простом сдвиге суспензии в поле, как и при движении суспензии без поля, появляются нормальные напряжения, которые зависят от величины и направления поля. Эти явления были изучены в [62, 63].

§ 6. Кинетика ориентации неполярных частиц

Рассмотрим теперь, следуя [64], релаксационные процессы в суспензиях частиц, не имеющих постоянного дипольного момента. Формула (2.3) определяет для этого случая равновесную функцию распределения ориентаций

осесимметричных частиц в поле

$$w_0 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \frac{1}{F(\sqrt{\sigma/2})} e^{\frac{1}{2}\sigma y^2}, \quad (6.1)$$

где $y = \mathbf{e} \cdot \mathbf{h}$ — косинус угла между направлениями поля и оси симметрии частицы. Функция $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ табулирована [65] и имеет при малых и больших значениях аргумента разложения

$$F(z) = z \left(1 + \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{10} z^4 + \dots \right), \quad (6.2)$$

$$F(z) = \frac{1}{2z} e^{z^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{z^4} + \dots \right). \quad (6.3)$$

В равновесии значения нечетных моментов функции распределения равны нулю, а первые из четных имеют вид

$$\langle e_i e_k \rangle_0 = \frac{1}{2} (1 - M_2) \delta_{ik} + \frac{1}{2} (3M_2 - 1) h_i h_k, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 = & \frac{1}{8} (1 - 2M_2 + M_4) (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \\ & + \delta_{im} \delta_{kl}) + \frac{1}{8} (-1 + 6M_2 - 5M_4) (h_i h_k \delta_{lm} + \\ & + h_l h_m \delta_{ik} + h_i h_l \delta_{km} + h_k h_m \delta_{il} + h_i h_m \delta_{kl} + h_k h_l \delta_{im}) + \\ & + \frac{1}{8} (3 - 30M_2 + 35M_4) h_i h_k h_l h_m. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В этих выражениях введены функции M_α , которые определяются

$$M_\alpha = 2\pi C \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}\sigma y^2} y^\alpha dy, \quad \frac{1}{C} = 4\pi \sqrt{\frac{2}{\sigma}} F(\sqrt{\sigma/2}). \quad (6.6)$$

Из определения видно, что функции M_α удовлетворяют уравнению

$$M_{\alpha+1} = 2C \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{M_\alpha}{C} \right),$$

с помощью которого, учитывая, что $M_0 = 1$, находим

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{\exp(\sigma/2)}{F(\sqrt{\sigma}/2)} - \frac{1}{\sigma}, \quad M_4 = \frac{1}{\sigma} + \left(1 - \frac{3}{\sigma}\right) M_2. \quad (6.7)$$

При малых и больших значениях аргумента для функций (6.7) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{45}\sigma + \frac{1}{945}\sigma^2 + \dots, \\ M_2 &= 1 - \frac{2}{\sigma} - \frac{2}{\sigma^2} + \dots, \\ M_4 &= \frac{1}{5} + \frac{4}{105}\sigma + \dots, \quad M_4 = 1 - \frac{4}{\sigma} + \frac{4}{\sigma^2} + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

При неравновесной ситуации моменты первого порядка тождественно равны нулю, а уравнение для момента второго порядка, как следует из уравнения (2.10) при $\gamma_{js} = 0$, имеет вид

$$\frac{1}{D} \frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} = -6 \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \sigma (\langle e_k e_j \rangle h_j h_i + \langle e_i e_j \rangle h_j h_k - 2 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle h_j h_s). \quad (6.9)$$

В уравнение (6.9) входит момент четвертого порядка. Для того чтобы выразить его через моменты второго порядка и получить замкнутую систему уравнений, воспользуемся тем же приемом, что в § 4. Предполагаем, что для каждого неравновесного значения функции распределения можно найти некоторое фиктивное поле $E^* = E + \delta E$ такое, что в данный момент функция распределения в действительном поле совпадает с равновесной функцией распределения в фиктивном поле. Тогда неравновесные моменты функции распределения определяются выражениями (6.4) и (6.5), в которых действительное значение поля заменено на фиктивное.

Значения фиктивного поля при предположении, что отклонения от равновесия являются малыми и, следовательно, $\delta E/E \ll 1$, можно выразить через моменты второго порядка. Воспользовавшись формулой (6.4) и разлагая величину M_2 в ряд, находим с точностью до членов перво-

го порядка уравнение

$$\begin{aligned} \xi_{ik} = \sigma \frac{\partial M_2}{\partial \sigma} (3h_i h_k - \delta_{ik}) \frac{E_j \delta E_j}{E^2} + \\ + \frac{1}{2} (3M_2 - 1) \frac{1}{E^2} (E_i \delta E_k + E_k \delta E_i - 2h_i h_k E_j \delta E_j). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь введено обозначение для отклонения второго момента от равновесного значения $\xi_{ik} = \langle e_i e_k \rangle - \langle e_i e_k \rangle_0$. Из уравнения (6.10) определяем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{q}{T} E_j \delta E_j &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \sigma} \right)^{-1} \xi_{js} h_j h_s, \\ \frac{q}{T} (E_i \delta E_k + E_k \delta E_i) &= \frac{2\sigma}{3M_2 - 1} \xi_{ik} + \\ &+ \left[\frac{\sigma}{3M_2 - 1} (\delta_{ik} - 3h_i h_k) + \left(\frac{\partial M_2}{\partial \sigma} \right)^{-1} h_i h_k \right] \xi_{js} h_j h_s. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Теперь с помощью формул (6.4) и (6.5) записываем тождество

$$\begin{aligned} \frac{q}{T} (\langle e_k e_j \rangle E_j^* E_i^* + \langle e_i e_j \rangle E_j^* E_k^* - 2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle E_l^* E_m^*) = \\ = 6 \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

и, оставляя члены первого порядка по δE и используя соотношения (6.11), определяем входящие в уравнение (6.9) выражения через моменты второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{q}{T} (\langle e_k e_j \rangle E_j E_i + \langle e_i e_j \rangle E_j E_k - 2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle E_l E_m) = \\ = 6 \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \frac{2\sigma}{3M_2 - 1} [- \langle e_k e_j \rangle_0 \xi_{ji} - \\ - \langle e_i e_j \rangle_0 \xi_{jk} + 2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle \xi_{lm}]_0 + \frac{\sigma}{3M_2 - 1} \times \\ \times [- \langle e_k e_j \rangle_0 (\delta_{ji} - 3h_j h_i) - \langle e_i e_j \rangle_0 (\delta_{kj} - 3h_j h_i) + \\ + 2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 (\delta_{lm} - 3h_l h_m)] \xi_{js} h_j h_s + \\ + \left(\frac{\partial M_2}{\partial \sigma} \right)^{-1} [- \langle e_k e_j \rangle_0 h_j h_i - \langle e_i e_j \rangle_0 h_j h_k + \\ + 2 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 h_l h_m] \xi_{js} h_j h_s. \end{aligned}$$

Далее будем учитывать, что

$$\partial M_2 / \partial \sigma = (M_4 - M_2^2)/2. \quad (6.14)$$

Подставляя теперь полученное выражение в уравнение (6.9) и учитывая соотношения (6.4) и (6.5), находим релаксационное уравнение для моментов второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ik}}{dt} = & -Dv_1\xi_{ik} - Dv_2(\xi_{ij}h_jh_i + \xi_{kj}h_jh_i - 2\xi_{js}h_jh_sh_ih_k) - \\ & -\frac{1}{2}Dv_3(3h_ih_k - \delta_{ik})\xi_{js}h_jh_s - \\ & -\left[\sigma\frac{\partial M_2}{\partial\sigma}(3h_ih_k - \delta_{ik}) - (3M_2 - 1)h_ih_k\right]\frac{E_j}{E^2}\frac{dE_j}{dt} - \\ & -\frac{1}{2}(3M_2 - 1)\frac{1}{E^2}\left(E_i\frac{dE_k}{dt} + E_k\frac{dE_i}{dt}\right). \quad (6.15) \end{aligned}$$

В уравнение входят три функции

$$\begin{aligned} v_1 = & \sigma\frac{1 - M_4}{3M_2 - 1}, \quad v_2 = \sigma\frac{5M_4 - 3M_2}{3M_2 - 1}, \\ v_3 = & 4\frac{M_2 - M_4}{M_4 - M_2^2} - v_1, \quad (6.16) \end{aligned}$$

которые определяют независимые времена релаксации

$$1/\tau^{(1)} = Dv_1, \quad 1/\tau^{(2)} = D(v_1 + v_3), \quad 1/\tau^{(3)} = D(v_1 + v_2). \quad (6.17)$$

Используя разложение (6.8), находим, что при малых значениях поля

$$v_1 \approx 6 - \frac{3}{7}\sigma, \quad v_2 \approx \frac{3}{7}\sigma, \quad v_3 \approx \frac{2}{7}\sigma. \quad (6.18)$$

При больших σ главные члены разложения v_α по $1/\sigma$ имеют вид

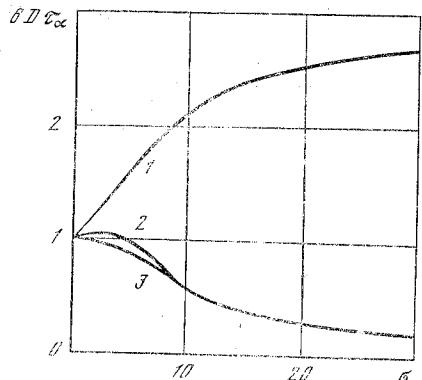
$$v_1 \approx 2 + 6/\sigma, \quad v_2 \approx \sigma + 3, \quad v_3 \approx \sigma - 2. \quad (6.19)$$

Отсюда первые члены разложений времен релаксаций (6.17) имеют вид

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} \approx & \frac{1}{6D}\left(1 + \frac{1}{14}\sigma\right), \quad \tau^{(2)} \approx \frac{1}{6D}\left(1 + \frac{1}{42}\sigma\right), \\ \tau^{(3)} \approx & \frac{1}{6D} + O(\sigma^2), \quad (6.20) \end{aligned}$$

$$\tau^{(1)} \approx (1/2D)(1 - 3/\sigma), \quad \tau^{(2)} \approx 1/D\sigma, \quad \tau^{(3)} \approx 1/D\sigma. \quad (6.21)$$

Рис. 9. Зависимость времен релаксации ориентации неполярных частиц в поле от безразмерной напряженности поля (цифры у кривых — номера времен релаксации, соответствующие формулам (6.17))



При произвольных σ значения времен релаксации изображены на рис. 9.

Отметим, что из релаксационного уравнения (6.15) при умножении на $h_i h_k$ следует скалярное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi_{ik}h_ih_k)}{dt} = & -\frac{1}{\tau^{(2)}}\xi_{js}h_jh_s - 2\sigma\frac{\partial M_2}{\partial\sigma}\frac{E_j}{E^2}\frac{dE_j}{dt} + \\ & +\frac{1}{E^2}\left(E_i\frac{dE_k}{dt} + E_k\frac{dE_i}{dt} - 2h_ih_kE_j\frac{dE_j}{dt}\right)\xi_{ik}, \quad (6.22) \end{aligned}$$

которое оказывается полезным при изучении релаксационных процессов в суспензиях.

Глава 5

АНИЗОТРОПИЯ СУСПЕНЗИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ

§ 1. Тензор диэлектрической проницаемости

Рассматривая супензию как диэлектрик, записываем общее соотношение между средними значениями индукции и напряженности электрического поля [49]

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k. \quad (1.1)$$

Усреднение выполняется по объему, значительно превышающему объем частицы.

Независящее от поля слагаемое D_{0i} в (1.1) возникает в случае, если взвешенные частицы обладают постоянными диполями, при этом

$$D_{0i} = n\mu \langle e_i \rangle.$$

Рассматривая осесимметричные частицы, находим из уравнений (2.6.5) — (2.6.8), что отличный от нуля момент первого порядка возникает при движении тогда, когда взвешенные осесимметричные частицы не имеют плоскости симметрии, перпендикулярной оси симметрии частицы, и частицы находятся в неоднородном потоке. В однородном потоке без поля первый момент независимо от симметрии частицы равен нулю и, следовательно, также всегда поляризуемость супензии без поля равна нулю.

Когда по каким-либо обстоятельствам постоянная поляризуемость равна нулю, соотношение (1.1) записывается в виде

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k.$$

Эта формула определяет тензор диэлектрической проницаемости супензии ϵ_{ik} , описывающий оптическую анизотропию супензии, которая может быть вызвана или течением (эффект Максвелла), или приложенным полем (эффект Керра), или тем и другим вместе. Все эти эффекты для супензии связаны с ориентирующим воздействием

поля и градиентов скорости на взвешенные в жидкости частицы.

Определим далее, следуя [22], выражение для тензора диэлектрической проницаемости супензии через характеристики частицы.

Учитывая однородность поля внутри эллипсоида, помещенного в однородное внешнее поле $E_k^{(i)}$, для одной частицы записываем средние по объему значения

$$E_k = (\Omega/V) E_k^{(i)} + E_k^{(e)}, \quad D'_k = \epsilon^{(k)} (\Omega/V) E_k^{(i)'} + \epsilon E_k^{(e)'}, \quad (1.2)$$

где $\epsilon^{(k)}$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости частицы, который по предположению диагонален в системе координат, связанной с осями эллипсоида; ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкости. Вследствие предположенной анизотропии последняя формула из (1.2) справедлива только в системе координат, связанной с частицей.

Исключая из формул (1.2) усредненное поле вне частицы, находим

$$D'_k = \epsilon E'_k + (\Omega/V) (\epsilon^{(k)} - \epsilon) E_k^{(i)}. \quad (1.3)$$

Выражение для напряженности поля внутри эллипсоида, находящегося во внешнем поле, за которое в случае, если частица велика по сравнению с молекулярными размерами, мы можем принять среднее макроскопическое поле E_k , согласно [49, § 8], имеет вид

$$E_k^{(i)'} = \epsilon E'_k / \epsilon' + (\epsilon^{(k)} - \epsilon) n^{(k)}, \quad (1.4)$$

где $n^{(k)}$ — коэффициенты деполяризации, которые уже обсуждались в § 1 главы 5. Из выражений (1.3) и (1.4) находим

$$D'_k = \epsilon E'_k + \frac{\Omega}{V} \frac{\epsilon (\epsilon^{(k)} - \epsilon)}{\epsilon + (\epsilon^{(k)} - \epsilon) n^{(k)}} E'_k.$$

Далее переходим в лабораторную систему координат и, ограничиваясь рассмотрением эллипсоидов вращения, после усреднения по ориентациям частицы и учета полного числа частиц в единице объема получаем выражение для индукции электрического поля, которое определяет

известный [22] тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \gamma \varphi (\langle e_i e_k \rangle - \delta_{ik}/3), \quad (1.5)$$

где ε_0 и γ определяются выражениями (4.1.3) и (4.1.4).

Выражение (1.5) является универсальной формулой, определяющей тензор диэлектрической проницаемости через моменты функции распределения, и не зависит от того, какая причина вызывает изменения момента. Приведем теперь некоторые частные выражения для тензора диэлектрической проницаемости.

Если супензия находится в движении, то с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости из выражений (1.5) и (3.4.3) находим

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \frac{2}{5} \gamma \varphi \lambda \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau_2}} \gamma_{ik}(t-s) ds. \quad (1.6)$$

Для стационарного случая отсюда следует

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \gamma \varphi \lambda \gamma_{ik}/15D. \quad (1.7)$$

Если в неподвижной супензии осесимметричных частиц существуют градиенты концентраций, то из выражений (1.5) и (2.6.18) получаем

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \frac{1}{45} \gamma \varphi \frac{D^{\parallel} - D^{\perp}}{D} \frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r_i \partial r_k} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial^2 n}{\partial r_j^2} \right). \quad (1.8)$$

Этот эффект был указан в [24].

Супензия, помещенная в поле, также становится анизотропной. Из выражений (1.5) и (4.3.2) находим тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \gamma \varphi \left[\frac{1}{6} (1 - 3L_2) \delta_{ik} + \frac{1}{2} (3L_2 - 1) h_i h_k \right]. \quad (1.9)$$

При совместном действии потока и поля комбинация выражений (1.5) и (4.2.17) при слабых полях или (1.5) и (4.3.19) при сильных полях приводит к формулам, определяющим тензор диэлектрической проницаемости супензии в потоке с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и в поле, соответственно слабом и сильном.

Интересно, что если частица изотропна $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^0$, то $\gamma \neq 0$ и, таким образом, система ориентированных эллипсоидальных частиц из изотропного материала, взвешенных в жидкости с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \neq \varepsilon^0$, оптически анизотропна. При этом

$$\begin{aligned} \gamma = & \varepsilon (\varepsilon^0 - \varepsilon)^2 (n^{(2)} - n^{(1)}) / [\varepsilon + (\varepsilon^0 - \varepsilon) n^{(1)}] \times \\ & \times [\varepsilon + (\varepsilon^0 - \varepsilon) n^{(2)}]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Это явление носит название эффекта анизотропии формы, в отличие от собственной анизотропии, вызванной анизотропией материала частицы.

Отметим, что в движущейся супензии симметрия тензора диэлектрической проницаемости связана с симметрией тензора напряжений, однако сравнение выражений (3.2.7) и (1.5) показывает, что закон Брюстера, т. е. пропорциональность компонент тензора диэлектрической проницаемости компонентам тензора напряжений во всем интервале градиентов скоростей не выполняется. Однако при сравнении выражений (3.4.4) и (1.6), определенных с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости, находим, что закон Брюстера справедлив в следующей форме (здесь $i \neq k$):

$$\frac{\varepsilon_{ik}}{\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^\infty} = \frac{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk}}{\sigma_{ii} - \sigma_{kk} - \sigma_{ii}^\infty + \sigma_{kk}^\infty} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\Omega}{T}, \quad (1.11)$$

где Ω — объем частицы; $\sigma_{ik}^\infty = 2\eta_0 [1 + \varphi (\alpha + \zeta/3 + \chi/15)]$; γ_{ik} — значение тензора напряжений при больших частотах воздействия.

Выше мы ограничились рассмотрением монодисперсной супензии. При этом (см. формулу (1.5)) тензор диэлектрической проницаемости пропорционален тензору средней ориентации частиц, так что главные оси тензоров всегда совпадают. Ситуация изменится, если супензия не монодисперсна по форме частиц.

Рассмотрим супензию эллипсоидов вращения с полидисперсными по форме частицами, которые характеризуются различным отношением полуосей $s = a/b$. Для каждой из фракций справедливо соотношение (1.5), где $\varphi(s) = -\varphi g(s)$ — объемная доля s -й фракции. Для разбавленной супензии тензор диэлектрической прони-

щаемости записется в виде суммы по всем фракциям

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \varphi \sum g(s) \gamma(s) \left(\langle e_i e_k \rangle_s - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right).$$

Среднюю ориентацию можно определить как

$$\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} = \sum g(s) \left(\langle e_i e_k \rangle_s - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right).$$

Если отклонение от средней формы мало, то $\gamma(s)$ можно разложить в ряд

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (\partial\gamma/\partial s)_{s_0}(s - s_0) + \dots$$

При этом

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \varepsilon_0 \delta_{ik} + \varphi \gamma(s_0) \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \\ &+ \varphi \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)_{s_0} \sum g(s) (s - s_0) \left(\langle e_i e_k \rangle_s - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \dots \end{aligned}$$

При малом различии диэлектрических проницаемостей жидкости и частицы зависимость от s в γ (см. формулу (4.1.5)) появляется во втором пренебрежимом порядке малости. Поэтому с точностью до членов первого порядка все члены, кроме первого, исчезают, и в этом случае главные оси тензора диэлектрической проницаемости совпадают с главными осями тензора средней ориентации.

§ 2. Оптическая анизотропия при простом сдвиге

Результаты, приведенные в § 1, позволяют изучать динамическую анизотропию суспензии жестких эллипсоидов в случае произвольного потока и дают основу для экспериментального исследования различных типов течения, а не только простого сдвигового движения, которое рассматривалось ранее [4].

Однако, поскольку экспериментальные исследования часто выполняются при простом сдвиге, который является наиболее важным видом движения, рассмотрим оптическую анизотропию суспензии жестких эллипсоидов при простом сдвиговом движении. Далее приведем полученные в [66] результаты, которые непосредственно следуют из найденных в предыдущих параграфах общих выражений.

Показатель преломления системы связан с диэлектрической проницаемостью ε известным [49] соотношением $n^2 = \varepsilon$. В случае анизотропного материала для лучей, распространяющихся в направлении оптических осей и перпендикулярно к ним, справедливы аналогичные соотношения. В случае одноосного материала для луча, распространяющегося в направлении, перпендикулярном оптической оси (направление 3), и поляризованного в направлении оптической оси (направление 1) и перпендикулярного к ней (направление 2) справедливы соотношения $\varepsilon^{\parallel} = n_1^2$, $\varepsilon^{\perp} = n_2^2$.

Обозначая разницу между показателями преломления в этом случае $\Delta n = n_1 - n_2$, записываем $n_1 = \bar{n} + \Delta n/2$, $n_2 = \bar{n} - \Delta n/2$, где $\bar{n} = (n_1 + n_2)/2$ — среднее значение показателя преломления.

Возводя последние равенства в квадрат и вычитая из первого второе, получаем $n_1^2 - n_2^2 = 2\bar{n}\Delta n$, откуда находим

$$\Delta n = (\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp})/2\bar{n}. \quad (2.1)$$

При простом сдвиге ($v_{12} \neq 0$) симметричный тензор ε_{ik} недиагонален, но приводится к диагональному виду поворотом вокруг оси 3 на угол χ , называемый углом ориентации и определяемый формулой

$$\operatorname{tg} 2\chi = 2\varepsilon_{12}/(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}). \quad (2.2)$$

Вычисляя разность главных значений ε_{ik} в новой системе координат

$$\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp} = [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2]^{1/2},$$

по формуле (2.1) находим разность показателей преломления — величину двулучепреломления для лучей, распространяющихся в направлении оси 3:

$$\Delta n = [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2]^{1/2}/2\bar{n}. \quad (2.3)$$

Для суспензии эллипсоидов вращения тензора диэлектрической проницаемости имеет вид (1.5) и потому выражения (2.2) и (2.3) записываются в виде

$$\operatorname{tg} 2\chi = 2 \langle e_1 e_2 \rangle / (\langle e_1^2 \rangle - \langle e_2^2 \rangle), \quad (2.4)$$

$$\Delta n = (\gamma\varphi/2\bar{n}) [(\langle e_1^2 \rangle - \langle e_2^2 \rangle)^2 + 4 \langle e_1 e_2 \rangle^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Выражения (2.4) и (2.5) имеют совершенно общий характер, не зависящий от способа ориентации частиц. В случае нестационарного сдвигового движения с точностью до членов первого порядка по градиенту скорости из (2.4), (2.5) и (34.3) имеем

$$\chi = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta n = \frac{1}{5} \frac{\gamma \varphi \lambda}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau_2}} v_{12}(t-s) ds. \quad (2.6)$$

При осциллирующем сдвиговом движении, когда $v_{12} \sim e^{-i\omega t}$, из (2.6) следует формула, полученная ранее в [67]:

$$\Delta n = \frac{1}{5n} \gamma \varphi \lambda \frac{\tau_2}{1 - i\omega \tau_2} v_{12}. \quad (2.7)$$

Для определения оптической анизотропии при стационарном сдвиговом движении воспользуемся выражениями для моментов (35.4). По (2.4) и (2.5) находим первые члены разложения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\chi &= 6 \frac{1}{P} + \dots, \quad \chi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12} P + \dots, \\ \Delta n &= \frac{\gamma \varphi}{2n} \left(\frac{1}{15} \lambda P + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $P = v_{12}/D$. Выражения для χ и Δn с большей точностью были найдены Петерлином и Стюартом [66], которые рассмотрели оптическую анизотропию суспензии в этом частном случае. Угол ориентации χ и фактор ориентации $2\tilde{n}\Delta n/\gamma\varphi$ как функции P и отношения полуосей a/b вычислены и табулированы в работе [68].

Подобным же образом, исходя из общих формул (2.4) и (2.5), могут быть получены формулы для угла гашения и величины двулучепреломления суспензии, движущейся в поле. В случае слабого поля для определения анизотропии следует воспользоваться выражениями (4.2.17) для моментов функции распределения. Рассмотрение анизотропии суспензии при простом сдвиговом движении $v_{21} \neq 0$ в слабом электрическом поле, направленном по оси 2, было выполнено в [51] с большей точностью, чем определяется выражением (42.14).

В случае сильных полей комбинация формул (2.4), (2.5) и (43.19) приводит к определению оптической анизотропии в этой ситуации.

§ 3. Оптическая анизотропия во вращающемся поле

Тензор диэлектрической проницаемости суспензии неполярных частиц определяется выражением (1.5), в силу которого для описания кинетики оптической анизотропии в полях, зависящих от времени, необходимо знать изменение моментов второго порядка во времени, что определяет уравнение (46.15).

Рассмотрим, следуя [64], оптическую анизотропию во вращающемся поле, когда компоненты единичного вектора, указывающего направление поля, имеют вид

$$h_1 = \cos \omega t, \quad h_2 = \sin \omega t, \quad h_3 = 0. \quad (3.1)$$

Угол между оптической осью суспензии и осью 1, обозначенный через χ , выражается через моменты функции распределения формулой (2.4). Можно ожидать, что во вращающемся поле (3.1) оптическая ось суспензии вращается с той же скоростью, но с отставанием по фазе на угол α , который требуется найти. В соответствии с этим предположением записываем неизвестные моменты в виде

$$2\langle e_1 e_2 \rangle = A \sin 2(\omega t - \alpha), \quad \langle e_1^2 \rangle - \langle e_2^2 \rangle = A \cos 2(\omega t - \alpha). \quad (3.2)$$

Соответствующие равновесные значения моментов определяются формулой (46.4). Для рассматриваемых комбинаций компонент моментов имеем

$$\begin{aligned} 2\langle e_1 e_2 \rangle_0 &= \frac{1}{2} (3M_2 - 1) \sin 2\omega t, \\ \langle e_1^2 \rangle_0 - \langle e_2^2 \rangle_0 &= \frac{1}{2} (3M_2 - 1) \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для определения неизвестного угла α воспользуемся теперь уравнением (46.15), которое для рассматриваемого случая записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{11}}{dt} &= -Dv_1 \xi_{11} - 2Dv_2 (\xi_{11} h_1^2 + \xi_{12} h_1 h_2 - I h_1^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} Dv_3 I (3h_1^2 - 1) - (3M_2 - 1) h_1 dh_1/dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{22}}{dt} &= -Dv_1 \xi_{22} - 2Dv_2 (\xi_{12} h_1 h_2 + \xi_{22} h_2^2 - I h_2^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} Dv_3 I (3h_2^2 - 1) - (3M_2 - 1) h_2 dh_2/dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\xi_{33}}{dt} = -Dv_1 \xi_{33} + \frac{1}{2} Dv_3 I, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_{12}}{dt} = & -Dv_1\xi_{12} - Dv_2[\xi_{11}h_1h_2 + \xi_{12}(h_1^2 + h_2^2) + \\ & + \xi_{22}h_1h_2 - 2Ih_1h_2] - \frac{3}{2}Dv_3Ih_1h_2 - \\ & - \frac{1}{2}(3M_2 - 1)\left(h_1\frac{dh_2}{dt} + h_2\frac{dh_1}{dt}\right),\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$d\xi_{13}/dt = -Dv_1\xi_{33} - 2Dv_2(\xi_{13}h_1^2 + \xi_{32}h_1h_2), \quad (3.8)$$

$$d\xi_{23}/dt = -Dv_1\xi_{23} - 2Dv_2(\xi_{13}h_1h_2 + \xi_{32}h_2^2), \quad (3.9)$$

где $I = \xi_{js}h_jh_s$ — инвариант, который, как следует из уравнения (46.22), в рассматриваемом случае не зависит от времени и имеет вид

$$I = -\tau^{(2)}\omega y. \quad (3.10)$$

Здесь $x = A \cos 2\alpha$, $y = A \sin 2\alpha$.

Теперь из уравнения (3.6) находим

$$\xi_{33} = -(\nu_3/2\nu_1)\omega\tau^{(2)}y$$

и, поскольку $\xi_{ii} = 0$, то

$$\xi_{11} + \xi_{22} = (\nu_3/2\nu_1)\omega\tau^{(2)}y. \quad (3.11)$$

Вычитая уравнение (3.5) из уравнения (3.4) и используя тождество

$$\begin{aligned}\xi_{11}h_1^2 - \xi_{22}h_2^2 = & \frac{1}{2}[(\xi_{11} - \xi_{22})(h_1^2 + h_2^2) + \\ & + (\xi_{11} + \xi_{22})(h_1^2 - h_2^2)]\end{aligned}$$

и выражение (3.11), находим

$$\begin{aligned}\frac{d(\xi_{11} - \xi_{22})}{dt} = & -D(v_1 + v_2)(\xi_{11} - \xi_{22}) + \\ & + \frac{1}{2}D\nu_3\omega\tau^{(2)}y\left(3 - \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\cos 2\omega t + (3M_2 - 1)\sin 2\omega t.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Уравнение (3.7) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\frac{d2\xi_{12}}{dt} = & -D(v_1 + v_2)2\xi_{12} - \frac{1}{2}D\left(\nu_3\frac{\nu_2}{\nu_1} + 4\nu_2 + \right. \\ & \left. + 3\nu_3\right)\tau^{(2)}\omega y\sin 2\omega t - (3M_2 - 1)\cos 2\omega t.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) находим вид неизвестных, определяемых уравнениями (3.12) и (3.13):

$$2\xi_{12} = [x - 1/2(3M_2 - 1)]\sin 2\omega t - y\cos 2\omega t, \quad (3.14)$$

$$\xi_{11} - \xi_{22} = [x - 1/2(3M_2 - 1)]\cos 2\omega t + y\sin 2\omega t.$$

Теперь выражения (3.14) подставляем в уравнения (3.12) и (3.13) и определяем систему уравнений для $x = A \cos 2\alpha$ и $y = A \sin 2\alpha$. Решение этой системы определяет угол запаздывания

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\tau^{(3)}\omega, \quad (3.15)$$

где

$$1/\tau^{(3)} = D(v_1 + v_2). \quad (3.16)$$

Зависимость времени релаксации от напряженности поля изображена на рис. 9. При малых и больших напряженностях первые члены времени релаксации $\tau^{(3)}$ определяются выражениями (46.20) и (46.21)

$$1/\tau^{(3)} = 6D + 0(\sigma^2), \quad 1/\tau^{(3)} = D\sigma. \quad (3.17)$$

Напомним, что выражение (3.15) справедливо при малом отклонении от равновесного состояния, когда и угол α мал. В этом случае в сильных полях зависимость угла запаздывания от скорости вращения поля ω и напряженности поля имеет вид

$$\alpha \sim \omega/E^2. \quad (3.18)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, использование общих методов статистической физики позволяет сформулировать уравнения движения суспензии без поля и в поле, а дальнейшее изучение сводится к анализу полученных систем уравнений, включая и релаксационное уравнение, которые пока еще мало исследованы. Впрочем, формулировкой уравнений движения и заканчивается статистическая механика суспензий и начинается просто механика суспензий — исследование полученных систем уравнений в различных ситуациях.

Результаты в том приближении, какое изложено в данной работе, т. е. с точностью до членов первого порядка по объемной концентрации частиц φ , используются для оценки формы и размеров жестких макромолекул. Для этого обычно применяют приборы, в которых реализуется простое сдвиговое движение достаточно разбавленного раствора макромолекулярного вещества в подходящей вязкой жидкости. При этом разбавленные растворы макромолекулярных веществ обнаруживают оптическую анизотропию, зависимость вязкости от градиента скорости и другие эффекты, которые типичны для суспензии жестких частиц и были описаны в третьей главе при рассмотрении простого сдвигового движения. Эти эффекты позволяют выполнить оценку формы и размеров макромолекул. Типичная экспериментальная техника и методы оценки описаны, например, в монографии [69].

Используя приведенные результаты для оценки формы и размеров макромолекул, следует, конечно, иметь в виду, что реальные макромолекулы не являются идеально жесткими частицами. Более того, большой класс состоит из очень гибких макромолекул, которые образуют в разбавленном растворе сферически симметричные легко деформируемые клубки [69]. В связи с этим представляют интерес результаты изучения суспензии деформируемых частиц, т. е. извесей вязких, упругих или вязкоупругих частиц [70–72].

Простейшим образом деформируемая макромолекула может быть схематизирована частично жесткими

гантельями, суспензия которых рассмотрена в Приложении. Более адекватной моделью является модель, состоящая из многих бусинок, связанных последовательно упругими или вязкоупругими силами [69].

Кроме того, результаты статистической механики суспензии находят применение для объяснения особенностей поведения молекулярных жидкостей и жидких кристаллов [73]. При этом анализ основывается на одномолекулярном приближении, когда рассматривается одна молекула, моделируемая жесткой, недеформируемой частицей, которая движется в некоторой среде, образованной всеми остальными молекулами.

Для изотропных макромолекулярных жидкостей среду, где движется молекула, можно считать изотропно вязкой, и потому изложенные в монографии результаты пригодны для качественного описания нелинейных эффектов при течении молекулярных жидкостей, а также для описания релаксационных процессов в них.

Попытка непосредственного использования указанных результатов для описания поведения жидких кристаллов приводит к противоречиям [73], от которых, однако, можно избавиться, если предположить, что молекула, как кинетическая единица, движется в некоторой вязкой анизотропной среде, анизотропия которой соответствует общей анизотропии жидкого кристалла, и обобщить изложенные в данной работе результаты на этот случай. При этом следует также учитывать, что на молекулу действует момент сил, описывающий взаимодействие молекулы со средним полем, представляющим остальные макромолекулы. На этой основе были изучены релаксационные процессы в жидких кристаллах [64, 74] и сформулированы уравнения гидродинамики жидких кристаллов. Следует также иметь в виду, что реальные молекулы, из которых состоят молекулярные жидкости и жидкие кристаллы, не являются идеально жесткими частицами, поэтому построенные таким образом теории и по этой причине могут претендовать лишь на качественное соответствие с опытом.

Суспензия — один из простейших объектов, для описания которых используются методы статистической физики. Эти методы могут применяться и успешно применяются и для описания поведения других структурно-неоднородных систем.

Приложение

ДИНАМИКА СУСПЕНЗИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ГАНТЕЛЕЙ

Динамика гантели в потоке

Гантель — две частицы, связанные упругой силой, — является простейшей моделью, качественно передающей движение частиц, молекул или макромолекул, которые могут деформироваться при движении.

Рассмотрим далее супензию таких гантелей, находящуюся в движении, так что задано асимптотическое значение тензора градиентов скорости v_{ik} , и потому наблюдаемая слаженная макроскопическая скорость может быть определена как $v_i = v_{ik}x_k$.

В линейном по скоростям частиц приближении уравнение движения системы взаимодействующих броуновских частиц имеет вид

$$dr_i^\alpha/dt = u_i^\alpha, \quad (1)$$

$$m^\alpha du_i^\alpha/dt = -B_{ij}^{\alpha\gamma}(u_j^\gamma - v_{jl}r_l^\gamma) - G_{ij}^{\alpha\gamma}u_j^\gamma + F_i^\alpha + \phi_i^\alpha(t), \quad (2)$$

где r_i^α и u_i^α — координата и скорость частицы с номером α .

В правой части уравнения (2) записаны четыре составляющих силы, действующие на частицу α : гидродинамического увлечения, внутренней вязкости, упругая и случайная силы. Матрицы $B_{ij}^{\alpha\gamma}$, $G_{ij}^{\alpha\gamma}$, F_i^α зависят от разности координат различных частиц и могут быть разложены по этим разностям.

При рассмотрении супензии невзаимодействующих гантелей можно рассматривать одну гантель, которая находится в потоке вязкой жидкости с асимптотически заданным постоянным градиентом скорости v_{ij} , как это было выполнено в работе [75], результаты которой будут изложены далее.

Пусть r' , r'' и u' , u'' — соответственно координаты и скорости бусинок гантели, уравнения движения которых, пренебрегая инерционными силами и заменив скорость

частицы средней скоростью $w^\alpha = \int u^\alpha f\{du\}$, а случайную силу на — $T\nabla \ln W$, записываем следующим образом:

$$-2T\mu(r_i'' - r_i') + \zeta(v_{ij}r_j'' - w_i'') - \frac{1}{2}\lambda e_i e_j(w_j'' - w_j') - T\nabla_i'' \ln W = 0, \quad (3)$$

$$-2T\mu(r_i' - r_i'') + \zeta(v_{ij}r_j' - w_i') + \frac{1}{2}\lambda e_i e_j(w_j'' - w_j') - T\nabla_i' \ln W = 0, \quad (4)$$

где $\zeta = 6\pi\eta_0/a$ — коэффициент трения шарика с радиусом a в вязкой жидкости; λ — коэффициент внутренней вязкости; коэффициент упругости записан для удобства в виде $2T\mu$ (T — температура).

Выражения для сил упругости и внутренней вязкости, действующих на бусинки гантели, которые использованы при записи уравнений (3) и (4), представляют по существу первые члены разложений сил по разности координат и разности скоростей частиц. Предполагается также, что возмущением потока соседней частицей можно пренебречь.

Далее удобно использовать новые координаты

$$\rho_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_i'' - r_i'), \quad \rho_i^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_i'' + r_i') \quad (5)$$

и соответствующие скорости

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i'' - w_i'), \quad \psi_i^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i'' + w_i'). \quad (6)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial r_j'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho_j^0} - \frac{\partial}{\partial \rho_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r_j''} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho_j^0} + \frac{\partial}{\partial \rho_j}\right),$$

при сложении и вычитании уравнений (3) и (4) находим уравнения, определяющие скорости диффузии ψ и ψ^0 :

$$\zeta(v_{ij}\rho_j^0 - \psi_i^0) - T \frac{\partial}{\partial \rho^0} \ln W = 0, \quad (7)$$

$$4T\mu\rho_i + \zeta(\psi_i - v_{ij}\rho_j) + \lambda e_i e_j \psi_j + T\nabla_i \ln W = 0. \quad (8)$$

Для того чтобы найти ψ_i , умножим уравнение (8) на единичный вектор, образуя соотношения

$$\zeta(\psi_i e_i - v_{ij} \rho_j e_i) + \lambda e_j \psi_j + 4T\mu \rho_j e_j + T e_j \nabla_j \ln W = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\psi_i e_k - \psi_k e_i - v_{ij} \rho_j e_k + v_{kj} \rho_j e_i) + T(e_k \nabla_i - e_i \nabla_k) \ln W = \\ = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти операции соответствуют скалярному и векторному умножению уравнения (8) на вектор e . Из уравнений (9) и (10) находим

$$\psi_j e_j = \frac{\zeta}{\zeta + \lambda} v_{ij} \rho_j e_i - \frac{4T\mu}{\zeta + \lambda} \rho_j e_j - \frac{T}{\zeta + \lambda} e_j \nabla_j \ln W, \quad (11)$$

$$\psi_i e_k - \psi_k e_i = v_{ij} \rho_j e_k - v_{kj} \rho_j e_i - \frac{T}{\zeta} (e_k \nabla_i - e_i \nabla_k) \ln W. \quad (12)$$

Умножая последнее уравнение на e_k и используя (11), определяем

$$\begin{aligned} \psi_i = v_{ij} \rho_j - \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} v_{kj} e_k e_j \rho_i - \frac{4T\mu}{\zeta + \lambda} \rho_i - \\ - \frac{T}{\zeta} \nabla_i \ln W + \frac{T}{\zeta} \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} e_i e_j \nabla_j \ln W. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнения (7) находим скорость, пропорциональную скорости диффузии центра масс гантеля:

$$\psi_i^0 = v_{ij} \rho_j^0 - \frac{T}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \rho_i^0} \ln W. \quad (14)$$

Функция распределения

Если размеры броуновских частиц велики, то инерционные эффекты оказываются несущественными, и поэтому можно исходить из уравнения Смолуховского, которое запишем в форме уравнения непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{\alpha=0}^N \frac{\partial (w_j^\alpha W)}{\partial r_j^\alpha} = 0, \quad (15)$$

где $w_j^\alpha = \int u_j^\alpha f\{du\}$ — средняя скорость движения или диффузии частицы.

Для частиц одной гантели уравнение (15) записывается как

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (w_j' W)}{\partial r_j'} + \frac{\partial (w_j'' W)}{\partial r_j''} = 0. \quad (16)$$

В координатах (5) уравнение (16) приобретает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho_j^0} (\psi_j^0 W) + \frac{\partial}{\partial \rho_j} (\psi_j W) = 0, \quad (17)$$

где ψ и ψ^0 определены формулами (13) и (14).

Уравнение (17) описывает диффузию гантели, как цепного, что не представляет здесь особого интереса, и диффузию бусинок друг относительно друга. Для последнего случая уравнения (17) и (13) определяют диффузионное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{T}{\zeta} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{T}{\zeta} \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} \left(\frac{2\rho_j}{\rho^3} \frac{\partial W}{\partial \rho_j} + e_s e_j \frac{\partial^2 W}{\partial \rho_j \partial \rho_s} \right) - \\ - 4T\mu \frac{1}{\zeta + \lambda} \left(3W + \rho_j \frac{\partial W}{\partial \rho_j} \right) + v_{js} \rho_s \frac{\partial W}{\partial \rho_j} - \\ - \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} e_s e_i v_{si} \left(3W + \rho_j \frac{\partial W}{\partial \rho_j} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если градиенты скорости отсутствуют, то нормированное на единицу решение уравнения (18) имеет вид

$$W_0 = (2\mu\lambda)^{1/2} \exp(-2\mu\rho^2). \quad (19)$$

При малых градиентах скорости функция распределения может быть найдена в виде разложения по инвариантным комбинациям вектора ρ и симметризованного и антисимметризованного тензоров градиентов скорости v_{ik} и ω_{ik} . В стационарном случае с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости

$$W = W_0 \left[1 + \frac{\zeta}{2T} v_{ik} \rho_i \rho_k + \frac{1}{8} \left(\frac{\zeta}{T} \right)^2 v_{ik} v_{sj} \rho_i \rho_k \rho_j \rho_s - \right. \\ \left. - \left(\frac{\zeta}{8\mu T} \right)^2 v_{ik} v_{ik} - K \left(\frac{\zeta}{T} \right)^2 v_{si} \omega_{sh} \rho_i \rho_k \right], \quad (20)$$

где W_0 определяется формулой (19). Коэффициент K зависит от ρ и коэффициента внутренней вязкости λ . Если $\lambda = 0$, то

$$K = 1/8\mu.$$

Для больших значений коэффициента внутренней вязкости, когда $\lambda/\zeta \gg 1$,

$$K = \frac{1}{6} \rho^2 + \frac{1}{9} \frac{\zeta}{\lambda} \rho^2 (5 - 4\mu\rho^2) + \\ + \frac{1}{27} \left(\frac{\zeta}{\lambda} \right)^2 \rho^2 (35 - 112\mu\rho^2 + 48\mu^2\rho^4) + \dots$$

Моменты функции распределения

Наблюдаемые физические величины выражаются через моменты функции распределения, например, моменты второго порядка

$$\langle e_i e_k \rangle = \int W e_i e_k \{d\rho\}, \quad \langle \rho_i \rho_k \rangle = \int W \rho_i \rho_k \{d\rho\}.$$

В стационарном случае с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости с помощью функции (20) находим

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{2}{5} \tau \gamma_{ik}, \quad \langle \rho_i \rho_k \rangle = \frac{1}{4\mu} \delta_{ik} + \frac{\tau}{2\mu} \gamma_{ik}, \\ \langle e_i e_k e_j e_l \rangle &= \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \\ \langle e_i e_k \rho_j \rho_l \rangle &= \frac{1}{20\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj}) + \\ &\quad + \frac{\tau}{30\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{sn} + \dots) \gamma_{sn}, \end{aligned} \quad (21)$$

где τ определяется выражением (23).

В общем случае моменты удобно находить из уравнений для моментов, которые определим далее. Например, умножая уравнение (18) на $\rho_i \rho_k$ и интегрируя по всем переменным, находим

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \rho_i \rho_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau} \frac{3}{4\mu} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau'} \left(\langle \rho_i \rho_k \rangle - \frac{3}{4\mu} \langle e_i e_k \rangle \right) + v_{ij} \langle \rho_j \rho_k \rangle + \\ &\quad + v_{kj} \langle \rho_j \rho_i \rangle - \frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} \langle \rho_i \rho_k e_j e_s \rangle \gamma_{js}. \end{aligned} \quad (22)$$

В уравнение (22) входят два характерных времени $\tau = \zeta/8T\mu$, $\tau' = (\zeta + \lambda)\tau/\zeta$. (23)

Первое определяет время релаксации ориентационного процесса, второе — деформационного.

Действительно, умножая уравнение (18) на ρ^3 и интегрируя по всем переменным или же непосредственно суммируя уравнение (22) с одинаковыми индексами, находим

$$\frac{d \langle \rho^2 \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau'} \left(\langle \rho^2 \rangle - \frac{3}{4\mu} \right) + \frac{2\zeta}{\zeta + \lambda} \langle \rho_s \rho_j \rangle \gamma_{sj}.$$

При больших внутренних вязкостях, когда $\lambda \rightarrow \infty$, $\langle \rho_i \rho_k \rangle \rightarrow \langle \rho^2 \rangle \langle e_i e_k \rangle$, уравнение (22) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + v_{is} \langle e_s e_k \rangle + \\ &\quad + v_{ks} \langle e_s e_i \rangle - 2 \langle e_i e_k e_s \rangle \gamma_{js}, \end{aligned} \quad (24)$$

которое описывает ориентационный процесс.

Полученные системы уравнений оказываются незамкнутыми. Только при $\lambda = 0$ из (22) следует система уравнений, которая оказывается замкнутой. При малой внутренней вязкости, когда $\lambda/\zeta \ll 1$, из уравнения (22), удаляя члены первого порядка по λ/ζ , находим

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \rho_i \rho_k \rangle}{dt} &= -\frac{1}{\tau} \left(\langle \rho_i \rho_k \rangle - \frac{1}{4\mu} \delta_{ik} \right) + v_{ij} \langle \rho_j \rho_k \rangle + \\ &\quad + v_{kj} \langle \rho_j \rho_i \rangle + 2 \frac{\lambda}{\zeta} \left(\frac{4T\mu}{\zeta} \langle \rho_i \rho_k \rangle - \frac{3T}{\zeta} \langle e_i e_k \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle e_i e_k \rho_j \rho_s \rangle \gamma_{js} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

При малых градиентах скорости моменты функции распределения могут быть определены через градиенты скорости при произвольных значениях внутренней вязкости.

Найдем решение уравнений (22) и (24) для случая, когда моменты не зависят от координат. Для этого умножим уравнение (22) на $e^{t/\tau'}$, а уравнение (24) на $e^{t/\tau}$ и проинтегрируем от t до $-\infty$. После интегрирования по частям и замены переменных получаем соотношения

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \rho_k \rangle &= \frac{1}{4\mu} \delta_{ik} + \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau'}} (v_{ij} \langle \rho_j \rho_k \rangle + v_{kj} \langle \rho_j \rho_i \rangle) ds - \\ &\quad - 6 \frac{T}{\zeta} \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau'}} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) ds - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau'}} \langle e_i e_k \rho_j \rho_s \rangle v_{js} ds, \end{aligned}$$

$$\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik} + \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau}} (v_{ij} \langle e_j e_k \rangle + v_{kj} \langle e_j e_i \rangle - 2 \langle e_i e_k e_j e_s \rangle \gamma_{js}) ds. \quad (26)$$

В выражениях (26) все подынтегральные функции берутся в точке $t = s$.

Из соотношений (26) при малых градиентах скорости моменты функции распределения могут быть найдены в виде разложения в ряд по кратным интегралам. С точностью до членов первого порядка по градиентам скорости, используя формулы (24), находим

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{ik} + \frac{2}{5} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau}} \gamma_{ik} (t-s) ds, \\ \langle \rho_i \rho_k \rangle &= \frac{1}{4\mu} \delta_{ik} + \frac{5\xi + 3\lambda}{10\mu(\xi + \lambda)} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau}} \gamma_{ik} (t-s) ds - \\ &- \frac{12}{5} \frac{T}{\xi} \frac{\lambda}{\xi + \lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{s'}{\tau}} \gamma_{ik} (t-s-s') ds' ds. \end{aligned} \quad (27)$$

В стационарном случае выражения для моментов $\langle \rho_i \rho_k \rangle$ можно определить с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости сравнительно просто.

При малых $\gamma = \lambda/\xi$ значения моментов с точностью до членов первого порядка по γ легко определяются из уравнения (25) с помощью известных в нулевом приближении по γ значений моментов $\langle \rho_i \rho_k \rangle$, $\langle e_i e_k \rangle$ и $\langle e_i e_k \rho_j \rho_s \rangle$ и равны

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \rho_k \rangle &= \frac{1}{4\mu} \left\{ \delta_{ik} + 2\tau \gamma_{ik} + 4\tau^2 \left[\gamma_{ij} \gamma_{jk} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{10} (5 + 2\gamma) (\omega_{ij} \gamma_{jk} + \omega_{kj} \gamma_{ji}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

При больших γ значения моментов вычисляются с помощью функции распределения (20) и с точностью до членов второго порядка по $1/\gamma$ и второго порядка по

градиентам скорости равны

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \rho_k \rangle &= \frac{1}{4\mu} \left\{ \delta_{ik} + 2\tau \gamma_{ik} + 4\tau^2 \left[\gamma_{ij} \gamma_{jk} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{54} \left(9 - \frac{24}{\gamma} + \frac{140}{\gamma^2} \right) (\omega_{ij} \gamma_{jk} + \omega_{kj} \gamma_{ji}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Удобно записать выражения (28) и (29) совместно в виде

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \rho_k \rangle &= \frac{1}{4\mu} \left\{ \delta_{ik} + 2\tau \gamma_{ik} + 4\tau^2 \left[\gamma_{ij} \gamma_{jk} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (1+Z) (\omega_{ij} \gamma_{jk} + \omega_{kj} \gamma_{ji}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$Z = \frac{2}{5} \gamma, \quad \gamma \ll 1,$$

$$Z = \frac{4}{27} (9 - 42/\gamma + 245/\gamma^2), \quad \gamma \gg 1.$$

Можно полагать, что Z является монотонной функцией γ .

Напряжения в движущейся суспензии

При деформировании системы взаимодействующих броуновских частиц скорость диффузии броуновской частицы и средняя скорость среды в той точке, где находится частица, могут не совпадать. Это приводит к появлению объемных сил, которые приводят к дополнительным напряжениям.

Суспензии взаимодействующих броуновских частиц удобно рассматривать как суперпозицию двух континуумов, один из которых с плотностью ρ^A и плотностью импульса $\rho^A v^A$ представляет растворитель, а другой — совокупность взаимодействующих броуновских частиц с плотностью

$$\rho^B = \sum_v m \langle \delta(x - r^v) \rangle$$

и плотностью импульса

$$\rho^B v_k^B = \sum_v m \langle u_k^v \delta(x - r^v) \rangle. \quad (31)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайной силы. Индекс v обозначает номер частицы.

Уравнения движения каждой из компонент имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^A v_k^A + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho^A v_j^A v_k^A = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{kj}^A - R_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^B v_k^B + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho^B v_j^B v_k^B = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{kj}^B + R_k,$$

где σ_{ik}^A — макроскопический тензор напряжений растворителя; σ_{ik}^B — макроскопический тензор напряжений среды, образованной броуновскими частицами; R_k — плотность силы, действующей со стороны жидкости на все частицы.

В целом рассмотренная система подчиняется уравнению движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j v_k = \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j},$$

где $\rho = \rho^A + \rho^B$ — плотность; $v_k = (\rho^A v_k^A + \rho^B v_k^B)/\rho$ — скорость; $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^A + \sigma_{ik}^B$ — тензор напряжений системы в целом.

При малой объемной доле взвешенных в вязкой жидкости частиц тензор напряжений компоненты A имеет вид

$$\sigma_{ik}^A = -p^A \delta_{ik} + 2\eta_0 (1 + v\varphi) \gamma_{ik}, \quad (32)$$

где p^A — парциальное давление растворителя; v — форм-фактор, определенный в § 4 главы 3 для эллипсоидальных частиц и равный 5/2 для сферических частиц.

Определим теперь тензор σ_{ik} . Дифференцируя (31) по времени, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho^B v_k^B &= \sum_v m \left[\left\langle \frac{du_k^v}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^v) \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j^v u_k^v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^v) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Подставим теперь в полученную формулу значение mdu_k^v/dt из уравнения (2) и найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho^B v_k^B &= \sum_\alpha \left[-\langle G_{kj}^{\alpha\beta} u_j^\beta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle + \langle F_k^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - m \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j^\alpha u_k^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle \right] + R_k, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$R_k = \sum_\alpha \langle [-B_{kj}^{\alpha\beta} (u_j^\beta - v_j r_l^\beta) + \phi_k^\alpha] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle \quad (34)$$

— сила, с которой броуновские частицы увлекаются жидкостью.

Далее воспользуемся предположением о том, что система представляет собой разбавленную суспензию частиц (макромолекул), которые включают некоторое количество броуновских частиц (для гантеля — две частицы). Поскольку внешних сил, действующих на частицы, нет и силами инерции пренебрегаем, то $R_k = 0$, потому из-за произвольного характера усреднения для каждой макромолекулы из (34) следует

$$\sum_\alpha \langle [-B_{kj}^{\alpha\beta} (u_j^\beta - v_j r_l^\beta) + \phi_k^\alpha] \rangle = 0.$$

Отсюда и из уравнения (2) находим, что в пренебрежении инерционными силами для каждой макромолекулы выполняется соотношение

$$\sum_\alpha \langle -G_{ij}^{\alpha\beta} u_j^\beta + F_i^\alpha \rangle = 0. \quad (35)$$

Далее разложим формально δ -функцию в ряд Тейлора около координаты центра масс a -й макромолекулы \mathbf{R}^a и ограничимся двумя членами разложения

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}^a) - (r_i^\alpha - R_i^a) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}^a). \quad (36)$$

Теперь, подставляя (36) в (33) и учитывая соотношение (35), находим уравнение, имеющее смысл закона сохранения импульса. Из этого уравнения, учитывая формулу (31) и определение тензора напряжений через поток импульса $\sigma_{ik}^B = \rho v_i^B v_k^B - \Pi_{ik}^B$, находим выражение для тензора

напряжений

$$\sigma_{ik}^B = \sum_{\alpha, \alpha} [-m \langle (u_i^\alpha - v_i^B)(u_k^\alpha - v_k^B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle + \\ + \langle G_{kj}^{\alpha\beta} u_j^\beta r_i^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}^\alpha) \rangle - \langle F_{kr_i}^{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}^\alpha) \rangle].$$

Предполагаем, что для скоростей выполняется локально равновесное распределение. Тогда

$$\sum_{\alpha, \alpha} m \langle (u_i^\alpha - v_i^B)(u_k^\alpha - v_k^B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}^\alpha) \rangle = n(N+1) T \delta_{ik},$$

где $[n = \sum_a \langle \delta(x - R^\alpha) \rangle]$ — плотность числа макромолекул; $N+1$ — число броуновских частиц в макромолекуле.

Рассматривая теперь макромолекулу из двух броуновских частиц ($N=1$) и используя координаты (5), записываем тензор напряжений

$$\sigma_{ik}^B = -nT \delta_{ik} + n[-T \delta_{ik} + 4T \mu \langle \rho_i \rho_k \rangle + \lambda \langle e_k e_i \psi_j \rho_j \rangle].$$

В последнем члене выполнено усреднение по скоростям и заменено $[(u_j'' - u_j)/\sqrt{2}]$ средней скоростью ψ_j , которая определена уравнением (13). Учитывая также, что

$$\langle e_k e_i \rho_j \nabla_j \ln W \rangle = -3 \langle e_i e_k \rangle,$$

находим

$$\sigma_{ik}^B = -nT \delta_{ik} + \frac{1}{2} n \zeta \left[\frac{1}{\tau'} \left(\langle \rho_i \rho_k \rangle - \frac{3}{4\mu} \langle e_i e_k \rangle \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau} \frac{3}{4\mu} \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} \langle \rho_k \rho_i e_j e_s \rangle \gamma_{js} \right], \quad (37)$$

где τ и τ' определяются выражениями (23). Тензор напряжений выражается через моменты функции распределения, которые были определены в (27)–(30).

В предельных случаях при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ выражение (37) точно совпадает с выражением, указанным в работе [76].

Вязкоупругость суспензии гантелей

Тензор напряжений (37) и уравнения для моментов функции распределения (22) и (24) являются системой определяющих уравнений суспензии деформируемых гантелей. Эта система незамкнутая, однако результаты могут быть получены или при малой внутренней вязкости, или

при малых градиентах скорости. Рассмотрим здесь вязкоупругость суспензии в линейном по градиентам скорости приближении.

С помощью выражений (21), (27), (32), (37) тензор напряжений суспензии деформируемых гантелей записываем в виде

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + 2\eta_0 (1 + v\varphi) \gamma_{ik} + \frac{2}{5} n T \left[\frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} \tau \gamma_{ik} + \right. \\ + 3 \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau}} \gamma_{ik}(t-s) ds + \frac{(5\zeta + 3\lambda)\zeta}{(\zeta + \lambda)^2} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau'}} \gamma_{ik}(t-s) ds - 3 \frac{\lambda\zeta}{(\zeta + \lambda)^2} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\tau'}} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-\frac{u}{\tau'}} \gamma_{ik}(t-s-u) du ds \left. \right]. \quad (38)$$

Определяющее уравнение (38) включает два времени релаксации, причем двойной интеграл в последнем члене не может быть сведен к предшествующим одинарным интегралам.

При осциллирующем сдвиговом движении, когда $\gamma_{ik} \sim e^{-i\omega t}$, тензор напряжений (38) определяет выражение для комплексного коэффициента сдвиговой вязкости

$$\eta = (1 + v\varphi) \eta_0 + \frac{1}{5} n T \tau \left(\frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} + \frac{3}{1 - i\omega\tau} + \right. \\ \left. + \frac{2\zeta}{\zeta + \lambda} \frac{1}{1 - i\omega\tau'} \right)$$

с компонентами

$$\eta' = (1 + v\varphi) \eta_0 + \frac{1}{5} n T \tau \left[\frac{2\lambda}{\zeta + \lambda} + \frac{3}{1 + (\tau\omega)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\zeta}{\zeta + \lambda} \frac{1}{1 + (\tau'\omega)^2} \right], \\ \eta'' = \frac{1}{5} n T \tau^2 \omega \left[\frac{3}{1 + (\tau\omega)^2} + \frac{2}{1 + (\tau'\omega)^2} \right]. \quad (39)$$

Укажем предельные значения динамической вязкости при малых и больших частотах. При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ имеем из выражения (39) соответственно

$$\eta' = (1 + v\varphi) \eta_0 + n T \tau, \quad \eta'' = 0,$$

$$\eta' = (1 + v\varphi) \eta_0 + \frac{2}{5} \frac{\lambda}{\zeta + \lambda} n T \tau, \quad \eta'' = 0.$$

Иногда вместо динамической вязкости удобнее использовать динамический модуль. Поскольку градиент скорости связан с градиентом перемещений соотношением $v_{12} = \dot{\lambda}_{12} = -i\omega\lambda_{12}$, то компоненты упомянутых величин связаны соотношением

$$G' - iG'' = -i\omega(\eta' + i\eta''). \quad (40)$$

Из (39) и (40) находим

$$\begin{aligned} G' &= \frac{1}{5} nT (\tau\omega)^2 \left[\frac{3}{1+(\tau\omega)^2} + \frac{2}{1+(\tau'\omega)^2} \right], \\ G'' &= (1+v\varphi)\omega\eta_0 + \frac{1}{5} nT\tau\omega \left[\frac{2\lambda}{\xi+\lambda} + \frac{3}{1+(\tau\omega)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\xi}{\xi+\lambda} \frac{1}{1+(\tau'\omega)^2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

При $\lambda = 0$ выражения (41) приобретают вид

$$G' = nT \frac{(\tau\omega)^2}{1+(\tau\omega)^2}, \quad G'' = (1+v\varphi)\omega\eta_0 + nT \frac{\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2},$$

при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G' &= \frac{3}{5} nT \frac{(\tau\omega)^2}{1+(\tau\omega)^2}, \\ G'' &= (1+v\varphi)\omega\eta_0 + \frac{1}{5} nT \left[2\tau\omega + \frac{3\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \right]. \end{aligned}$$

Нелинейные эффекты при простом сдвиге

Система уравнений (22), (24), (37) может быть использована для анализа движения супензии в любой экспериментальной ситуации и прежде всего в вискозиметрах, в которых, как правило, реализуется сдвиговое движение с известным градиентом скорости. Поэтому, не рассматривая задачу с граничными условиями, определим напряжения, возникающие в системе в простом случае, когда задан независящий от координат и времени градиент скорости $v_{12} \neq 0$.

Из уравнений (22) и (37) следует, что в стационарном случае тензор напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + 2(1+v\varphi)\eta_0\gamma_{ik} + \\ &\quad + \frac{1}{2}n\xi(v_{ij}\langle\rho_j\rho_k\rangle + v_{kj}\langle\rho_j\rho_i\rangle). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае моменты функции распределения определены с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости выражением (30).

При простом сдвиге по указанной формуле находим отличные от нуля моменты функции распределения

$$\begin{aligned} \langle\rho_1^2\rangle &= \frac{1}{4\mu} [1 + (2+Z)(\tau v_{12})^2], \\ \langle\rho_2^2\rangle &= \frac{1}{4\mu} [1 - Z(\tau v_{12})^2], \\ \langle\rho_3^2\rangle &= \frac{1}{4\mu}, \quad \langle\rho_1\rho_2\rangle = \frac{1}{4\mu} \tau v_{12}. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, записываем с точностью до членов третьего порядка напряжения, которые могут быть измерены на опыте:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{33} &= nT(\tau v_{12})^2, \quad \sigma_{22} - \sigma_{33} = 0, \\ \sigma_{12} &= \eta v_{12}, \quad \eta = (1+v\varphi)\eta_0 + nT\tau[1 - Z(\tau v_{12})^2]. \end{aligned} \quad (43)$$

Моменты (42) определяют также угол средней ориентации при простом сдвиге χ , для которого справедлива формула

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2\langle\rho_1\rho_2\rangle}{\langle\rho_1^2\rangle - \langle\rho_2^2\rangle} = \frac{1}{1+Z} \frac{1}{\tau v_{12}}.$$

Отсюда

$$\chi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1+Z)\tau v_{12}. \quad (44)$$

По формулам (43) и (44), определяющим зависимость сдвиговой вязкости и среднего угла ориентации от градиента скорости и внутренней вязкости, можно судить о кинетической жесткости молекул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Де Гroot С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
3. Шлиомис М. И. ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 259.
4. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. В кн.: Проблемы гидромеханики и механики сплошных сред. М., «Наука» 1969, с. 17.
5. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
6. Oldroyd J. D. Proc. Roy. Soc., 1950, v. A200, s. 523.
7. Noll W. J. Rational Mech. Anal., 1955, v. 4, s. 3.
8. Мандельштам Л. И., Леонович М. А. ЖЭТФ, 1937, т. 7, с. 438.
9. Финкельштейн Б. Н., Фастов Н. С. Докл. АН СССР, 1950, т. 74, с. 879.
10. Hand G. L. J. Fluid Mech., 1962, v. 13, с. 33.
11. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
12. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир». 1973.
13. Хэнпель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
14. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 3. М., «Наука», 1966, с. 75.
15. Jeffrey J. B. Proc. Roy. Soc., 1922, v. A102, s. 161.
16. Brenner H. Chem. Engng. Sci., 1964, v. 19, s. 519.
17. Cox R. G. J. Fluid Mech., 1974, v. 45, s. 625.
18. Brenner H. Progress in heat and mass transfer, 1972, v. 6, s. 509.
19. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., ИЛ, 1948.
20. Клякин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975.
21. Brenner H. J. Colloid Sci., 1965, v. 20, s. 104; 1967, v. 23, s. 407.
22. Покровский В. Н. Коллоид. журн., 1967, т. 29, с. 576.
23. Gans R. Ann. physik, 1928, v. 86, s. 628, 652.
24. Hess S. Physica, 1974, v. 74, s. 277.
25. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., «Наука», 1971.
26. Batchelor G. K. J. Fluid Mech., 1970, v. 41, p. 545.
27. Николаевский В. Н. ПММ, 1975, № 2, с. 374.
28. Покровский В. Н. Коллоид. журн., 1968, т. 30, с. 881.
29. Покровский В. Н. ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 651.
30. Brenner H. Ann. Rev. Fluid. Mech., 1970, v. 2, p. 137.
31. Hinch E. J. J. Fluid Mech., 1972, v. 54, с. 423.
32. Покровский В. Н. УФН, 1971, т. 105, с. 625.
33. Hand G. L. Arch. Rational Mech. Anal., 1961, v. 7, p. 81.
34. Шмаков Ю. И., Таран Е. Ю. Инж.-физ. журн., 1970, т. 18, с. 1019.
35. Hinch E. J., Leal L. G. J. Fluid Mech., 1972, v. 52, с. 683.
36. Brenner H. Int. J. Multiphase Flow, 1974, v. 1, p. 195.
37. Бегоулов П. Б., Шмаков Ю. И. Инж.-физ. журн., 1972, т. 23, с. 340.
38. Brenner H., Condiff D. W. J. Colloid Interface Sci., 1974, v. 47, p. 199.
39. Peterlin A. Z. Physik, 1938, Bd 111, S. 232.
40. Workman H. J., Hollingsworth C. A. J. Colloid Interface Sci., 1969, v. 29, p. 664.
41. Takserman-Kroser R., Ziabicki A. J. Pol. Sci., 1963, v. A1, p. 491, 507.
42. Leal L. G., Hinch E. J. J. Fluid Mech., 1972, v. 55, p. 745.
43. Hinch E. J., Leal L. G. J. Fluid Mech., 1973, v. 57, p. 753.
44. Kuhn W., Kuhn H. Helv. Chim. Acta, 1943, v. 26, p. 1394.
45. Saito N. J. Phys. Soc. Japan, 1954, v. 6, p. 297.
46. Scheraga H. A. J. Chem. Phys., 1955, v. 23, p. 1526.
47. Layec Y., Wolff C. J. Pol. Sci: Pol. Chem. Ed., 1973, v. 11, p. 1653.
48. Giesecus H. Rheol. Acta, 1962, v. 2, p. 50,
49. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1957.
50. Бегоулов П. Б., Шмаков Ю. И. Инж.-физ. журн., 1972, т. 23, с. 88.
51. Ikeda S. J. Chem. Phys., 1963, v. 38, с. 2839.
52. Леонович М. А. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1944.
53. Марценюк М. А., Райхер Ю. Л., Шлиомис М. И. ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 834.
54. Шлиомис М. И. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, с. 1071.
55. Saito N., Kato T. J. Phys. Soc. Japan, 1957, v. 12, p. 1393.
56. Chaffey C. E., Mason S. G. J. Colloid Sci., 1965, v. 20, p. 330.
57. Chaffey C. E., Mason S. G. J. Colloid Interface Sci., 1968, v. 27, p. 445.
58. Марценюк М. А. ЖПМТФ, 1973, № 5, с. 75.
59. Шлиомис М. И. ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2441.
60. Шлиомис М. И. УФН, 1974, т. 112, с. 427.
61. Brenner H., Weissman M. J. Colloid Interface Sci., 1972, v. 41, p. 499.
62. Бегоулов П. Б., Шмаков Ю. И. Инж.-физ. журн., 1973, т. 24, с. 1094.
63. Shmakov Yu. I., Begoulev P. B. Acta physica polonica, 1973, v. A44, p. 645.
64. Покровский В. Н. ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1880.
65. Карпов К. Д. Таблицы функций $F(z)$ в комплексной области. М., Изд-во АН СССР, 1958.
66. Peterlin A., Stuart H. Z. Physik, 1939, Bd 112, s. 1.
67. Cerf R. J. Physique, 1952, v. 13, p. 458.
68. Scheraga H., Edsall J., Gadd J. J. Chem. Phys., 1951, v. 19, p. 1101.
69. Цветков В. Н., Эскин В. Е., Френкель С. Я. Структура макромолекул в растворах. М., «Наука», 1964.
70. Roscoe R. J. Fluid Mech., 1967, v. 28, p. 273.
71. Goddard J. D., Miller Ch. J. Fluid Mech., 1967, v. 28, p. 657.
72. Schowalter W. R., Chaffey C. E., Brenner H. J. Colloid Interface Sci., 1968, v. 26, p. 152.
73. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945.
74. Hess S. Z. Naturforsch., 1976, Bd. 31a, s. 1034.
75. Покровский В. Н., Чуприкова В. И. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 13.
76. Bird R. B., Warner H. R., Evans D. C. Adv. Polymer Sci., 1974, v. 8, p. 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Макроскопические уравнения движения	7
§ 1. Законы сохранения для деформируемой системы	7
§ 2. Термодинамические потоки в деформируемой системе	10
§ 3. Простейшие вязкоупругие жидкости	15
Глава 2. Частица в потоке вязкой жидкости	20
§ 1. Кинематика частицы	20
§ 2. Возмущение потока эллипсоидальной частицей	22
§ 3. Динамика частицы	25
§ 4. Движение частицы эллипсоидальной формы	30
§ 5. Броуновское движение частиц	34
§ 6. Диффузия частиц в потоке	40
Глава 3. Динамика суспензии без поля	47
§ 1. Напряжения в движущейся суспензии	47
§ 2. Тензор напряжений суспензии эллипсоидов	51
§ 3. Ориентация частиц в потоке	55
§ 4. Вязкоупругость суспензии	60
§ 5. Напряжения и вязкость при простом сдвиге	66
§ 6. Вязкость при продольной деформации	69
Глава 4. Динамика суспензии в поле	74
§ 1. Напряжения в суспензии, движущейся в поле	74
§ 2. Ориентация частиц в поле и в потоке	78
§ 3. Установившаяся ориентация полярных частиц	83
§ 4. Кинетика ориентации полярных частиц	88
§ 5. Вязкость суспензии в поле	95
§ 6. Кинетика ориентации неполярных частиц	102
Глава 5. Анизотропия суспензии при движении	108
§ 1. Тензор диэлектрической проницаемости	108
§ 2. Оптическая анизотропия при простом сдвиге	112
§ 3. Оптическая анизотропия во вращающемся поле	115
Заключение	118
Приложение	120
Динамика суспензии деформируемых гантелей	120
Литература	135